Date

2010 春 統計

(1) $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

$$p_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{kT}}}{Z_N}$$

$$Z_1 = \sum e^{-\frac{1}{kT}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}\sum\left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^n$$

$$= e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}} = \left(2\sinh\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^{-1}$$

$$p_n = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2\sinh\frac{\hbar\omega}{2kT}}$$

(2) $\langle E\rangle = \sum E p_n = \sum \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

$$= e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}\sum\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^n$$

$$= \hbar\omega\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}\sum n\left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^n+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^n$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}x^n &= \frac{1}{1-x}\\ \sum_{n=0}nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}\\ \sum_{n=1}nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}\\ \sum_{n=1}nx^{n} &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}}$$

$$= \hbar\omega\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}\left(\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right)$$

$$\cancel{= \hbar\omega\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}\left(\frac{1}{2}\frac{2e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}+1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right)}$$

$$\cancel{= \hbar\omega\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}\left(\frac{2e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}+e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}-e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}\right)\frac{1}{2}}$$

$$= \hbar\omega\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$