第 3 回院試対策 2/25

氏名 ぜっくり

第 2 回宿題の解答

$$|x| \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

$$\sum \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

3. 量子力学

波動関数を $\psi(x,t)$、ポテンシャルエネルギーを $V(x)$、質量をmとすると、1 次元のシュレディンガー方程式は、

x微分　t微分

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = i\hbar\dot{\psi}$$

と書くことができる。ここで、$\psi(x,t), m, V(x)$は波動関数、粒子の質量、ポテンシャルエネルギーをそれぞれ表す。ただし、ここでは $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$、$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$ のように偏微分記号を省略して表した。

以下では、波動関数の振幅が一部に局在した波束を考えてみよう。波束の場合は、ψおよびその任意階の導関数は $x \to \pm\infty$で 0 とみなしてよいものとする。

波動関数の定義から、位置の期待値は、

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx$$

と書くことができる（ψ^*はψの複素共役)。

各小問のポイント

(1) 高3 ☆

(2)
計算 とにかく丁寧に ☆☆☆
(3)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi\right)$$

$$\dot{\psi}^* = -\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*\prime\prime} + V\psi^*\right)$$

（1）一般に $x \to \pm\infty$ で 0 となる微分可能な関数 $f(x), g(x)$ について、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f' g dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f g' dx$$

が成り立つことを示しなさい。

$$\underbrace{[fg]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{表面項}} - \int f g' \, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f g' \, dx$$

（2）運動量の期待値 $m\frac{d}{dt}\langle x \rangle$ が、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi dx$$

と書けることを示しなさい。

$$m\frac{d}{dt}\langle x \rangle = m\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi \, dx$$

$$= m\int \dot{\psi}^*(x\psi) + \psi^*(\dot{x\psi}) \, dx$$

$$= m\int \dot{\psi}^* x \psi + \psi^*(\dot{x}\psi + x\dot{\psi}) \, dx$$

$\dot{x} = 0$ （tに依存しない）

$$= m\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\psi}^* x \psi + \psi^* x \dot{\psi} \, dx$$

$$= \frac{m}{i\hbar}\int -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*''} + V\psi^*\right)x\psi + \psi^* x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi\right) dx$$

$$= \frac{m}{i\hbar}\int \frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*''} x\psi - V\psi^* x\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\psi^* x\psi'' + \psi^* x V\psi \, dx$$

$$= \frac{m}{i\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}\int \psi^{*''} x\psi - \psi^* x\psi'' \, dx$$

$$(x\psi)'' = (\psi + x\psi')' = \psi' + x\psi'' + \psi' = 2\psi' + x\psi''$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\int \psi^{*''} x\psi - \psi^* x\psi'' \, dx$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\left(-\int \psi^{*'}(x\psi)' \, dx\right) - \int \psi^* x\psi'' dx = \frac{\hbar}{2i}\int \psi^*(x\psi)'' - \psi^* x\psi'' \, dx$$

$$= \frac{-i\hbar}{2}\int \psi^*\left(x\psi'' + 2\psi' - x\psi''\right)dx = \int \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi \, dx$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi\right)$$

$$\dot{\psi}^* = -\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*''} + V\psi^*\right)$$

（3）上式をさらにtで微分することにより、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-\frac{\partial}{\partial x}V\right)\psi dx$$

が成り立っていることを示し、この式の物理的意味について説明しなさい。

$$\langle \dot{p} \rangle = \frac{d}{dt}\int \psi^*(-i\hbar)\psi' dx$$

本当は $\frac{\partial}{\partial x}\psi \times \frac{\partial}{\partial t}$ だが $\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial t}\psi$ としてる。

$$= -i\hbar\int \dot{\psi}^*\psi' + \psi^*(\dot{\psi})' \, dx$$

$$= -i\hbar\int\left(-\frac{1}{i\hbar}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*''} + V\psi^*\right)\psi' + \psi^*\left(\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi\right)\right)' dx$$

$$= \int\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*''} + V\psi^*\right)\psi' + \psi^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - V\psi\right)' dx$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int \underbrace{\psi^{*''}\psi' - \psi^*\psi'''}_{\text{表面項のやつで消える.}} dx + \int V\psi^*\psi' - \psi^*(V\psi)' dx$$

$$(V\psi)' \to V'\psi + V\psi'$$

$$= \int -\psi^* V'\psi \, dx$$

$$= -\langle V' \rangle$$

$$m\langle \ddot{x} \rangle = -\langle V' \rangle = \langle F(x) \rangle$$

$$m\ddot{x} = -V' = F(x)$$

似てる。