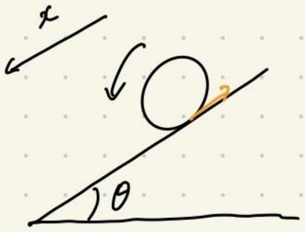
2020 中大秋期

I 球と球殻

・運動方程式を2つ立てられるか
（並進方向と回転方向）
・2つの慣性モーメントを求められるか。



質量：M，半径：R

重力加速度：g，摩擦力：f

。球

・並進方向の運動方程式

重心の加速度をaとすると、

$$Ma = Mg\sin\theta - f \quad \cdots①$$

回転方向のEOM

角加速度α，球の慣性モーメントI_1を用いて

$$I_1\alpha = \underbrace{R}_{\text{回転軸からの距離}}\cdot\underbrace{f}_{\text{それに作用する力}} \quad \cdots②$$

未知数が3つなので、もう1つ式が必要

⇒重心の加速度と角加速度の関係

重心の位置をxとすると、

$$x = R\cdot\phi \quad (\phi：回転角)$$

2階微分

$$a = R\cdot\alpha \quad \cdots③$$

φ→α 角度から角加速度へ。

②，③より

$$f = \frac{I_1 a}{R^2} \quad \cdots④$$

④を①に代入して。

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)a = Mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{Mg}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}\sin\theta$$

球殻の重心の加速度をa'とすると。

並進方向のEOM

$$Ma' = Mg\sin\theta - f \quad \cdots⑤$$

角加速度をα'，慣性モーメントをI_2とすると。

$$I_2\alpha' = R\cdot f \quad \cdots⑥$$

⇒重心の加速度と角加速度の関係

$$x' = R\cdot\phi'$$

$$a' = R\cdot\alpha' \quad \cdots⑦$$

⑥，⑦より

$$f = \frac{I_2 a'}{R^2} \quad \cdots⑧$$

⑧を⑤に代入すると.

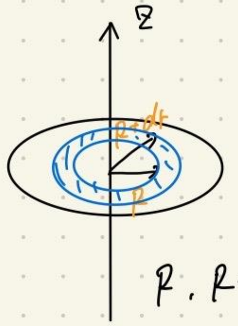
$$a' = \frac{\mu g}{\left(\mu + \frac{I_2}{R^2}\right)} \sin\theta$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mu g}{\left(\mu + \frac{I}{R^2}\right)} \sin\theta \\ a' = \dfrac{\mu g}{\left(\mu + \frac{I_2}{R^2}\right)} \sin\theta \end{cases}$$

慣性モーメントしか差がない

⇒ 慣性モーメントを出す.

まずは円板



R, R+dr で出来た円輪の面積を求める.

⇒ $2\pi R \cdot dR$

面密度を σ とすると.

質量は $2\pi R \sigma\, dR$

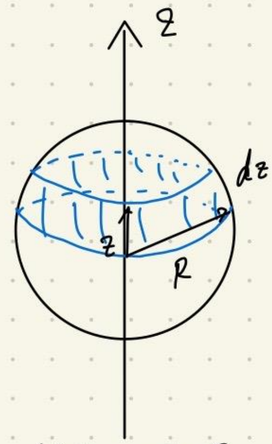
z軸回りについて

$$\underbrace{2\pi R \sigma\, dR}_{\text{質量}} \cdot \underbrace{R^2}_{\text{回転軸からのキョリの2乗}}$$

$$I = \int_0^R 2\pi\sigma R^3\, dR = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4$$

$\sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$ より $I = \dfrac{1}{2} M R^2$

球



dz の部分の円板の体積は

$$\pi\left(\sqrt{R^2 - z^2}\right)^2 dz$$

密度を ρ とすると.

$$\pi\rho\left(\sqrt{R^2 - z^2}\right)^2 dz$$

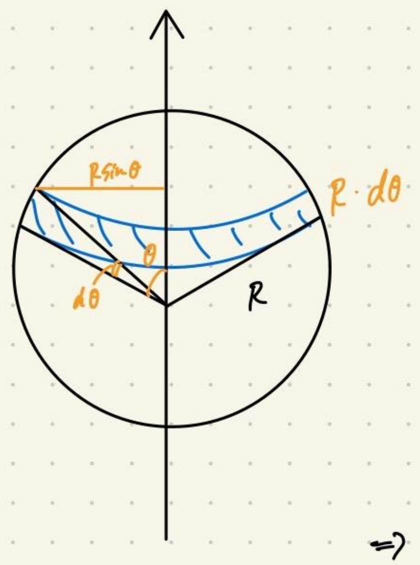
z軸回りのとき.

$$I = \frac{1}{2}\underbrace{\pi\rho\left(\sqrt{R^2 - z^2}\right)^2 dz}_{\text{質量}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{R^2 - z^2}\right)^2}_{\text{キョリの2乗}}$$

$$I = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\pi\rho\left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

$\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ より. $I = \dfrac{2}{5} M R^2$ ⇒ I_1

球殻



帯の面積は

$$2\pi R\sin\theta \cdot R\,d\theta$$

面密度を σ とすると.

質量は

$$2\pi\sigma R^2\sin\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow 2\pi\sigma R^2\sin\theta\,\underbrace{(R\sin\theta)^2}_{\text{回転軸からのキョリ2乗}}\,d\theta$$

$$I=\int_0^{\pi} 2\pi\sigma R^4\sin^3\theta\,d\theta = 2\pi\sigma R^4\int_0^{\pi}\frac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}MR^2$$

$\Rightarrow I_2$

まとめると.

・球

$$a=\frac{5}{7}g\sin\theta$$

・球殻

$$a'=\frac{3}{5}g\sin\theta$$

慣性モーメントは

転がりにくさを表す.