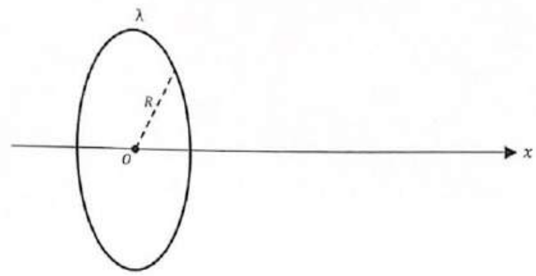
第1回院試 2/11(金)

作成者

II電磁気

図のように、固定された半径Rの細い輪の上に線電荷密度λの電荷が一様に分布している。以下の問いに答えなさい。



各小問のポイント

(1) クーロンの法則・積分 ☆☆

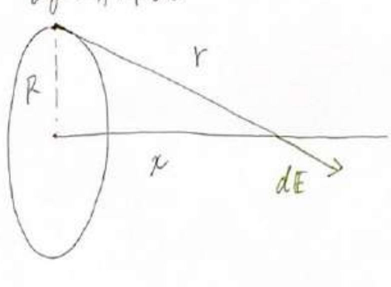
(2) 近似・微分方程式 ☆☆☆

(3) 微分 ☆☆☆

zじゃなくてx

(1) 輪の中心を通りの面に垂直に軸(輪の中心を原点とする) をとるとき、x軸上の電場$E(z)$を求めなさい。ただし、電場は右向きを正とする。解答では導出過程を明示すること。

$dq = \lambda \times R\,d\theta$



$$\begin{cases} F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{qQ}{|r|^2}e_r \\ E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{|r|^2}e_r \end{cases}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda R\,d\theta}{r^2}e_r$$

x軸方向の電場は

$$E = \int_0^{2\pi}\frac{dE}{d\theta}\,d\theta \times \frac{x}{r}$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda R}{r^2}\frac{x}{r}\,d\theta$$

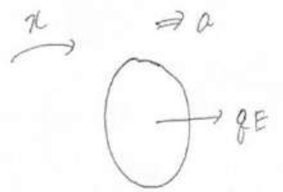
$$= \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\lambda R x}{r^3}$$

$$= \frac{\lambda R x}{2\varepsilon(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) x軸上を運動する質量m、電荷$q(q > 0)$の質点がある。この質点を、原点から微小距離$x(0 < x \ll R)$だけ離れた位置に置いて静かに離した。このとき、(a)$\lambda > 0$、(b)$\lambda < 0$のそれぞれの場合について、その後の質点の運動について簡単に述べなさい。ただし、荷電粒子の加速度運動にともなう電磁波の放射は無視できるとする。

初期条件

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$



$$ma \fallingdotseq \frac{q\lambda}{2\varepsilon R^2} x$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} - a^2 e^{\alpha t} = 0.$$

$$\alpha = \pm a$$

@線形同時
→ $x = e^{\alpha t}$ とおく
→ 方程式を解く.
→ 解を線形結合

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t} \\ v = \alpha C_1 e^{\alpha t} - \alpha C_2 e^{-\alpha t} \end{cases}$$

(a) $\lambda > 0$ のとき.

運動方程式

$$ma = \frac{\lambda R q \cdot x}{2\varepsilon (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} = R^3 \left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \fallingdotseq R^3$$

$$\ddot{x} - \underbrace{\frac{q\lambda}{2m\varepsilon R^2}}_{= a^2 \text{とおく}} x = 0$$

$x = e^{\alpha t}$ とおく.

初期条件より

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} x_0$$

$$x = x_0 \cosh(\alpha t) \quad //$$

(b) $\lambda < 0$ のとき. $\lambda = -\lambda'$

$$ma = -\frac{\lambda' R q x}{2\varepsilon (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \simeq -\underbrace{\boxed{\frac{q\lambda'}{2\varepsilon R}}}_{\omega^2} x$$

(3) 上記(a)、(b)のそれぞれの場合について、直線運動ならば加速度の最大値を、振動運動ならばその振動数を、その他の運動ならばその運動の特徴を表す物理量を求めなさい。ただし、導出過程を明示すること。

(a) のとき.

$$a = \frac{\lambda R q}{2m\varepsilon} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\lambda R q}{2m\varepsilon} \frac{\overset{=0}{\boxed{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x (R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}}}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \text{ のとき.}$$

$$(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} (R^2 - 2x^2) = 0$$

$x > 0$ より.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} R$$

増減表は

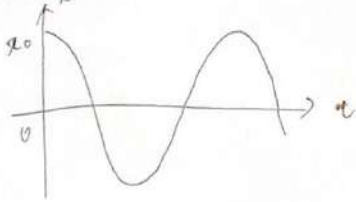
x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
a'		+	0	−
a	0	↗	a_{max}	↘

$$a_{max} = \frac{\lambda R q}{2m\varepsilon} \frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2} R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda q}{3\sqrt{3}\, \varepsilon R} \quad //$$

(b) のとき

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{q\lambda'}{2m\varepsilon}} \quad //$$

$$\left(\begin{array}{l} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \omega : \text{角振動数} \end{array} \right)$$



$$x = x_0 \cos \omega t$$