第 2 回院試対策

氏名　がっくり

5. 物理数学

区間$[-\pi,\pi]$において定義された連続な実関数$f(x)$を、三角関数を用いて

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\} \tag{1}$$

のように展開する。これをフーリエ級数展開という。ただし、式(1)の右辺は収束するとする。以下の問いに答えなさい。

各小問ポイントと難易度

(1) 暗記必須レベル　積和の公式、クロネッカーδ、奇偶関数　☆☆

(2) 1つだけワバラス　☆☆☆

(3)

(4)

公式通り → いつもの流れ　☆☆

$\sum$ は全て $\sum_{n=1}^{\infty}$ を指す

◎フーリエ級数について

$f(x)$ は区間 $(-\pi,\pi)$ で連続

$\boxed{周期 2\pi}$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \end{cases}$$

$f(x)$ が奇なら 0

$f(x)$ が偶なら 0

$f(x)$ は区間 $(-L,L)$ で連続

$\boxed{周期 2L}$

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum\{A_n\cos\frac{n}{L}x+B_n\sin nx\}$$

$$\begin{cases} A_n=\frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\frac{n}{L}x\,dx \\ B_n=\frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n}{L}x\,dx \\ A_0=\frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \end{cases}$$

$C(m+n) = C_m C_n - S_m S_n$
$C(m-n) = C_m C_n + S_m S_n$

$C(m+n) + C(m-n) = 2 C_m C_n$

(1)一般の$f(x)$に対する展開係数a_n, b_nを求めなさい。

a_nを求める

式(1)の両辺に$\cos mx$をかけて積分する$(m = 1, 2 \cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx}_{=0}$$
$$+ \sum\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos mx}_{ぐ}\underbrace{\cos nx}_{ぐ}\, dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos mx}_{ぐ}\underbrace{\sin nx}_{き}\, dx\right)$$
$$= \sum a_n \cdot \pi\delta_{m,n} = \pi a_m$$

よって $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$

同様に式(1)の両辺に$\sin nx$をかけて積分し、

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

//

(2)パーセバルの恒等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

を示しなさい。

<証明>

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\frac{a_0}{2} + \sum\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)\right\} dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx}_{\pi a_0} + \frac{1}{\pi}\sum a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx}_{\pi a_n} + \frac{1}{\pi}\sum b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx}_{\pi b_n}$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum\left(a_n^2 + b_n^2\right) = (\text{右辺})$$

//

(3)関数$f(x) = x^2 (-\pi < x \leq \pi)$に対する展開係数$a_n, b_n$を求め、$f(x)$をフーリエ級数展開しなさい。

$f(x) = x^2 \rightarrow$ 偶関数

$b_n = 0$

$$\pi a_n = 2\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$= 2\left[x^2 \frac{1}{n} \sin nx + 2x \frac{1}{n^2} \cos nx - 2 \frac{1}{n^3} \sin nx \right]_0^{\pi}$$

$$-2x\frac{1}{n}\sin nx \qquad -2\frac{1}{n^2}\cos nx$$

$$= 2\left[2x \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx$$

$$= \left[2 \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{3}\pi^3$$

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum \left(\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx \right)$$

(4)(3)の結果を利用することにより、無限級数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

を求めなさい。

$x = \pi$ のとき

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum \frac{4}{n^2}$$

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \sum \frac{4}{n^2}$$

$$\frac{2}{3}\pi^2 = \sum \frac{4}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$