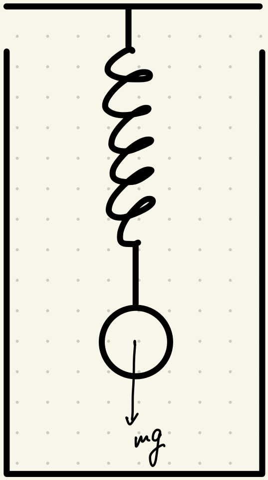
2020 春期　力学

1



抵抗力 bv $(b^2 < 4mk)$

ばね定数 k

(1)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - b\frac{dx}{dt} - kx$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \underline{\underline{mg}}$$

0ではない ⇒ 非同次

非同次系の解き方は

同次系と見て特解を足す

非同次の一般解

$x = $ (同次の一般解) + (特解)

$x = e^{\lambda t}$ とおく.

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0$$

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

$$m\left(\lambda^2 + \frac{b}{m} + \frac{k}{m}\right) = 0$$

負になる

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$b^2 - 4mk = -\alpha^2$ (αは定数)

$$\lambda = \frac{-b \pm i\alpha}{2m}$$

一般解は

$$x = C_1 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{i\frac{\alpha}{2m}t} + C_2 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{-i\frac{\alpha}{2m}t}$$

$$= e^{-\frac{b}{2m}t}\left(C_1 e^{i\frac{\alpha}{2m}t} + C_2 e^{-i\frac{\alpha}{2m}t}\right)$$

…同次の一般解.

$$= e^{-\frac{b}{2m}t}\left\{C_1\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2m}t\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2m}t\right)\right) + C_2\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2m}t\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2m}t\right)\right)\right\}$$

実部と虚部で分ける.

$$= e^{-\frac{b}{2m}t}\left\{(C_1 + C_2)\cos\left(\frac{\alpha}{2m}t\right) + i(C_1 - C_2)\sin\left(\frac{\alpha}{2m}t\right)\right\}$$

$\left(x \in \mathbb{R} \text{ より } C_1 = \frac{A_1 + iA_2}{2},\ C_2 = \frac{A_1 - iA_2}{2}\right)$

$$= e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_1\cos\left(\frac{\alpha}{2m}t\right) + A_2\sin\left(\frac{\alpha}{2m}t\right)\right)$$

三角関数の合成

$$= e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot A\cos\left(\frac{\alpha}{2m} + \tau\right)$$

特解を考える.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \underline{mg}$$ 定数

→ 特解は定数

$x = C$（定数）とすると，

$$kC = mg.$$

$$C = \frac{mg}{k} \quad \cdots \text{特解}.$$

一般解は

$$x = Ae^{-\frac{k}{2m}t}\cos\left(\frac{\alpha}{2m}t + \tau\right) + \frac{mg}{k}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$ としたとき．

$$\begin{cases} A = \dfrac{x_0}{\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{k}{\alpha}\right)\right)} \\ \tau = \tan^{-1}\left(\dfrac{k}{\alpha}\right) \end{cases}$$

(2) 天井が振幅 A，ω で単振動．

十分時間が経ったとして．

$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x} - kx + \underline{A\sin\omega t}$$

強制振動

$$x = E\cos\omega t + F\sin\omega t + \underbrace{\frac{mg}{k}}_{\text{工夫}}$$

$$-m\omega^2(E\cos\omega t + F\sin\omega t)$$
$$+ k\omega(-E\sin\omega t + F\cos\omega t)$$
$$+ k\left(E\cos\omega t + F\sin\omega t + \cancel{\frac{mg}{k}}\right)$$
$$= A\sin\omega t + \cancel{mg}$$

E，F が求まれば振幅が求まる．

$\sin\omega t$ の項と $\cos\omega t$ の項で合わせる．

$\cos\omega t$ $\quad -m\omega^2 E + k\omega F + kE = 0 \quad \cdots ①$

$\sin\omega t$ $\quad -m\omega^2 F - k\omega E + kF = A \quad \cdots ②$

$$① \cdots \quad E = \frac{k\omega}{k - m\omega^2}F$$

これを②に代入．

$$(-m\omega^2 + k)F + k\omega\left(\frac{k\omega}{k - m\omega^2}\right)F = A$$

$$F = \frac{(k - m\omega^2)A}{(k - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2}$$

$$E = \frac{-k\omega A}{(k - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2}$$

$$E\cos\omega t + F\sin\omega t$$
$$= \underbrace{a}_{\text{振幅}}\sin(\omega t + \delta)$$

$$a = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2}}$$