2020 春期 量子

$\boxed{1}$

(1) $A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$, $B = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}$ とすると、

$\hat{a} = A\hat{x} + iB\hat{p}$, $\hat{a}^\dagger = A\hat{x} - iB\hat{p}$ とおける

$[A, B+C] = [A, B] + [A, C]$

$[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$$

$$= [A\hat{x} + iB\hat{p}, A\hat{x} - iB\hat{p}]$$

$$= A^2\underbrace{[\hat{x}, \hat{x}]}_{0} - iAB\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}]}_{i\hbar} + iBA\underbrace{[\hat{p}, \hat{x}]}_{-i\hbar} + B^2\underbrace{[\hat{p}, \hat{p}]}_{0}$$

$$= AB\hbar + BA\hbar$$

$$= 2\hbar AB$$

$$= 2\hbar \cdot \frac{1}{2\hbar} = \underline{1}$$

(2) ゴールから逆算する.

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{数演算子 = \hat{N}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega\left\{(A\hat{x} - iB\hat{p})(A\hat{x} + iB\hat{p}) + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \hbar\omega\left\{A^2\hat{x}^2 + iAB\underbrace{(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})}_{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar} + B^2\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \hbar\omega\left(A^2\hat{x}^2 - \hbar AB + B^2\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{\hbar\omega\left(\frac{\hat{p}^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2\right)}$$

$$[\hat{a}, \hat{H}] = [\hat{a}, \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})]$$

$$= \hbar\omega\left\{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}] + \underbrace{[\hat{a}, \frac{1}{2}]}_{=0}\right\}$$

$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

$$[\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}]}_{=0} + \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_{=1}\hat{a}\right)$$

$$= \underline{\hbar\omega\hat{a}}$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{H}] = [\hat{a}^\dagger, \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})]$$

$$= \hbar\omega[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\hat{a}]$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\underbrace{[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]}_{=-1} + \underbrace{[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]}_{=0}\hat{a}\right)$$

$$= \underline{-\hbar\omega\hat{a}^\dagger}$$

(3) エネルギー固有状態 → $\hat{H}|A\rangle = \lambda|A\rangle$

$\hat{a}|E\rangle$ に $\hat{H}$ を作用させると.

$$\hat{H}\hat{a}|E\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}|E\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(\underbrace{[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]}_{=-1} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\right)\hat{a}|E\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}\right)|E\rangle$$

$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$ とすると.

$\hat{H}|E\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|E\rangle = E|E\rangle$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}n - \frac{1}{2}\hat{a}\right)|E\rangle$$

$$E-1 \longrightarrow \hbar\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\hat{a}|E\rangle$$

$$= (E-1)\hat{a}|E\rangle$$

固有値は $E-1$

$$\begin{cases} \bullet\ \hat{H}\boxed{\hat{a}|E\rangle} = (E-1)\boxed{\hat{a}|E\rangle} \\ \bullet\ \hat{H}|E\rangle = E|E\rangle \end{cases}$$

で比べると、

$\hat{a}|E\rangle = |E-1\rangle$ と平行

$\hat{a}|E\rangle = c_1|E-1\rangle$ とできる。

(ii) $\hat{a}^\dagger|E\rangle$ に $\hat{H}$ を作用させると。 $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]$

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger|E\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger|E\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_{=1} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger|E\rangle \quad \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{3}{2}\hat{a}^\dagger\right)|E\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(n\hat{a}^\dagger + \frac{3}{2}\hat{a}^\dagger\right)|E\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)\hat{a}^\dagger|E\rangle$$

$\therefore\ \hat{H}\hat{a}^\dagger|E\rangle = (E+1)|E\rangle$

$\hat{a}^\dagger|E\rangle = c_2|E+1\rangle$

固有値は $E+1$ //

(4)

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|\psi\rangle$$

$$= \hbar\omega\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}|\psi\rangle$$

$$= \hbar\omega\left\{\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{1}{2}|\psi\rangle\right\}$$

$$= \hbar\omega\underbrace{\|a|\psi\rangle\|^2}_{\text{(ノルム)：ベクトルの長さ}} + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

ノルムの性質より

$\|a|\psi\rangle\|^2 > 0$ になる。

$\therefore\ \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$ //

(5)

$$E = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$$

$$= \hbar\omega\underbrace{\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle}_{=n\geq 0} + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

3の結果より

$\hat{a}$ はエネルギー固有値を1ずつ下げる

$n=0$ で最小になるには、$n=0,1,2,3,4\cdots$

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$ //

(6)

$|\psi_0\rangle$ に $a^\dagger$ を n 回作用させる。

規格化条件を満たす為

$\hat{a}^\dagger|E\rangle = c_2|E+1\rangle$ より

$\langle E|\hat{a}\hat{a}^\dagger|E\rangle = |c_2|^2$

$\langle E|\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|E\rangle = |c_2|^2$

$|c_2|^2 = n+1 \quad \therefore\ c_2 = \sqrt{n+1}$

よって

$a^\dagger|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle$

$a^\dagger|\psi_1\rangle = \sqrt{2}|\psi_2\rangle$

$a^\dagger|\psi_2\rangle = \sqrt{3}|\psi_3\rangle$

$\therefore\ |\psi_n\rangle = \sqrt{n!}|\psi_0\rangle$ //