**数学テスト B3(フーリエ・ラプラス変換)**

氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 周期$2\pi$の周期関数$f(x)=\begin{cases} x\ (0\le x<\pi) \\ -x\ (-\pi\le x<0)\end{cases}$について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$をフーリエ級数に展開せよ。

(2) (1)の結果を用いて$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 周期 $2\pi$の周期関数$f(x)=x^2(-\pi\le x<\pi)$について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$をフーリエ級数に展開せよ。

(2) (1)の結果を用いてリーマンのゼータ関数$\xi(2)$を求めよ。

$\boxed{3}$ $f(x)$およびその導関数$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$が無限遠で十分速やかに 0 に収束する($\frac{d^2f(x)}{dx^2}\to 0\ (|x|\to\infty,\ n\ge 0)$)のとき､導関数のフーリエ変換はどのように書けるか示し、それを証明せよ。

$\boxed{4}$ 次の関数をラプラス変換せよ。

(1) $f(t)=t^n\ (n=0,1,2,\cdots)$

(2) $f(t)=\delta(t)$

解を暗記していれば、解のみ答えて良い。

必要であれば、ガンマ関数$\Upsilon(t)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$を利用せよ。

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⓪

# 解答

1 (1) $f(x) \to$ 偶

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right)$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$n = 2l-1$ のとき

$$= \frac{-4}{(2l-1)^2\pi}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-1)^2}\cos(2l-1)x$$

(2) $x = 0$ のとき

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-1)^2} = 0$$
$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$
$$\sum\frac{1}{(2l-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2 (1) $f(x) \longrightarrow$ 偶

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{3}\pi^3$$
$$= \frac{\pi^2}{3}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\cdots\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int 2x\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right)$$
$$= -\frac{4}{n\pi}\left(\left[x\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\right] - \int 2\sin(nx)\cdots dx\right)$$
$$= \frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{4}{n^2\pi}\left(\pi(-1)^n\right)$$
$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx)$$

(2) $\zeta(n) = \sum\frac{1}{n^2}$

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \pi^2$$
$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum\frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \pi^2$$
$$\sum\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2\times\frac{1}{4}$$
$$= \frac{\pi^2}{6}$$

3 (1) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^nf}{dx^n}e^{-ikx}\,dx = (ik)^n\hat{f}(k)$$

$n = 0$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} = \hat{f}(k) = (ik)^0\hat{f}(k)$$

$n > 0$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^nf}{dx^n}e^{-ikx}\,dx = (ik)^n\hat{f}(k)$$

が成立すると仮定する.

$n+1$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)'e^{-ikx}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{d^nf}{dx^n}e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int\frac{d^nf}{dx^n}(-ik)e^{-ikx}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(ik\int\frac{d^nf}{dx^n}e^{-ikx}\,dx\right)$$
$$= ik\,(ik)^n\hat{f}(k)$$
$$= (ik)^{n+1}\hat{f}(k)$$

$\boxed{4}$ (1) $\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$

$st = u$ と変数変換する

$s\,dt = du$

$dt = \frac{1}{s} du$

$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u} \frac{1}{s} du$

$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du$

$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2 \cdots より)$

$= \underline{\frac{n!}{s^{n+1}}}$ //

(2) $\mathcal{L}(\delta(t))$

$= \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt$

積分の下限を $0 \to -\varepsilon$ と拡張する.

$= \int_{-\infty}^\infty \delta(t) e^{-st} dt$

$= e^{-s \cdot 0} = \underline{1}$ //