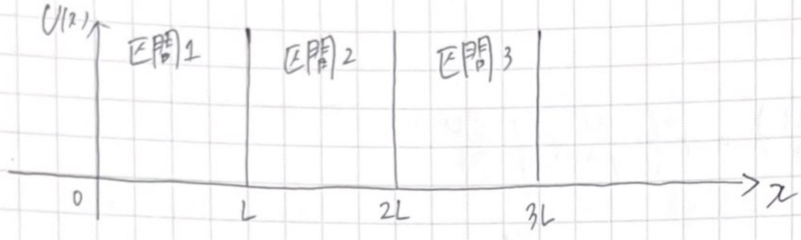
H29 東工大院試 午後

[1]

$$U(x)=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL),\quad a>0$$

$$\psi(x+3L)=\psi(x)$$



$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)$$

$\hat{S}$ = シフト演算子

$$\hat{S}\psi(x)=\psi(x-L)$$

$\hat{P}$ = 反転演算子

$$\hat{P}\psi(x)=\psi(-x)$$

(1)

(ア) $\hat{S}^{-1}\psi(x)=\psi(x+L)$

(イ) 恒等演算子

$\hat{S}\psi=\lambda\psi$

$\hat{S}^3\psi=\lambda^3\psi=\psi$

$\lambda^3=1$

(ウ) $\lambda=1,\omega,\omega^2$

(エ) $\hat{P}\psi=\lambda'\psi$

$\hat{P}^2\psi=\lambda'^2\psi=\psi$

$\lambda'^2=1$

$\lambda'=1,-1$

(オ) 交換可能

(カ) $\hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P}\psi(x)$

$=\hat{P}^{-1}\hat{S}\psi(-x)$

$=\cancel{\hat{P}^{-1}\psi(-x-L)}$

$=\cancel{\psi(x+L)}$

$=\cancel{\hat{S}^{-1}\psi(x)}$

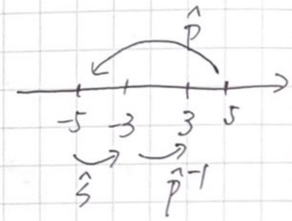
$=\hat{P}^{-1}\psi(-(x-L))$

$=\hat{P}^{-1}\psi(-x+L)$

$=\psi(x-L)$

$=\hat{S}\psi(x)$

下図は $x=5$, $L=2$ で…



$5\to5-2$

$x\to x-L$

∴ $\hat{S}$ としてる

(キ) $\hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P}=\hat{S}$ より

$\hat{S}\hat{P}=\hat{P}\hat{S}$ が成立

$\hat{S}\psi=\lambda\psi$

$\hat{P}\hat{S}\psi=\lambda\hat{P}\psi$

$\hat{S}\underline{\hat{P}\psi}=\lambda\underline{\hat{P}\psi}$

$\hat{P}\psi$ が $\hat{S}$ の固有関数となる

∴ $\hat{P}\psi$ の固有値 $=1,\omega,\omega^2$

ポテンシャルの係数 $a \to \infty$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) & (0 \le x \le L) \\ 0 & (L \le x \le 3L) \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \hat{S}\psi_1(x)$$

$$\psi_3(x) = \hat{S}^2\psi_1(x)$$

aが有限, 3つのエネルギー固有状態の波動関数

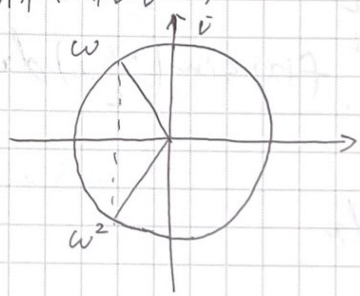
$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x)\right) \Rightarrow E_1$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1(x) + \omega^2\psi_2(x) + \omega\psi_3(x)\right)$$

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1(x) + \omega\psi_2(x) + \omega^2\psi_3(x)\right)$$

(2) $\psi_1+\psi_2+\psi_3$ の基底状態の線形結合より

E_1が1番低い



$$\omega = e^{i\frac{2}{3}\pi} \qquad \omega^2 = e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\omega^* = \omega^2$$

$$\therefore \Phi_3 = \Phi_2^*$$

$$\begin{cases} \hat{H}\Phi_2 = E_2\Phi_2 \\ \hat{H}\Phi_3 = E_3\Phi_3 = \hat{H}\Phi_2^* = E_3\Phi_2^* \end{cases}$$

$$\Phi_2^*\hat{H}\Phi_2 = \Phi_2^*E_2\Phi_2 \longrightarrow \langle\Phi_2|\hat{H}|\Phi_2\rangle = E_2|\Phi_2|^2$$

$$\Phi_2\hat{H}\Phi_2^* = \Phi_2E_3\Phi_2^* \qquad \langle\Phi_2|\hat{H}|\Phi_2\rangle^* = E_3|\Phi_2|^2$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \qquad \left(\because U(x) = a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL),\ a>0\right)$$

実部のみしか $\hat{H}$ はないので、

$$\langle\Phi_2|\hat{H}|\Phi_2\rangle^* = \langle\Phi_2|\hat{H}|\Phi_2\rangle \quad (\text{エルミート})$$

$$\therefore E_2 = E_3 \qquad (A)$$