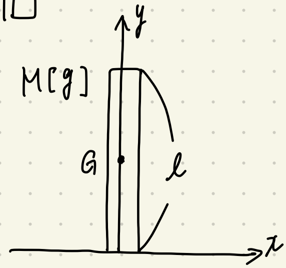
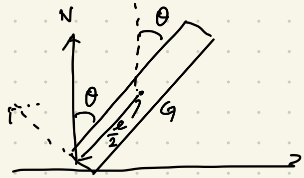
東工大　平成30年度

[1]





(1) 端点を通り垂直な軸の周りの慣性モーメント I_0

重心Gを通り 〃 I_G

$M=\rho l$

$dM=\rho\, dy$

$$I_G=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\rho\, dy\, y^2 = \rho\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2\, dy$$

$$=\rho\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$=2\rho\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{0}^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\rho\frac{l^3}{8}$$

$$=\frac{\rho}{12}l^3$$

$$=\frac{M}{12}l^2$$

平行軸の定理より

$$I_0=I_G+M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}Ml^2+\frac{1}{4}Ml^2=\frac{1}{3}Ml^2$$

(2)

$$\begin{cases} M\ddot{x}=0\\ M\ddot{y}=N-Mg\end{cases}$$

上のEOMより重心のxの値が変化しない

$$I_0\ddot{\theta}=N\cdot\frac{l}{2}\sin\theta$$

(3) $I_0 \to I_G$ と発覚

$$\frac{l}{2}Mg=Mgy+\underbrace{\frac{1}{2}M\dot{y}^2}_{\frac{1}{2}mv^2}+\underbrace{\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2}_{\frac{1}{2}I\omega^2}$$

並進エネルギー　回転エネルギー

(4) $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ を θ の関数で表す.

(3)の式に y を代入する.

$$y=\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\dot{y}=-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

$\dot{\theta}=l\omega$??

$$\frac{l}{2}Mg=Mg\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)+\frac{1}{2}M\left(-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{2}I_0(l\omega)^2$$

$$lMg=Mg(l\cos\theta)+M\left(-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+I_0l^2\omega^2$$

$$I_0 l^2 \omega^2 = Mg\left(l - l\cos\theta\right) + M\left(\frac{l}{2} l\omega \sin\theta\right)^2$$

ここでlが多くなった

$$\omega^2\left(I_0 l^2 - M\frac{l^4}{4}\sin^2\theta\right) = Mgl\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\omega^2 l^2\left(I_0 - M\frac{l^2}{4}\sin^2\theta\right) = \text{〃}$$

$$\omega^2 l^2\left(4\cdot\frac{1}{12}Ml^2 - Ml^2\sin^2\theta\right) = \text{〃}$$

$$\omega^2 l^2\left(l^2 - 3l^2\sin^2\theta\right) = 12\,gl\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\omega^2 l^4\left(1 - 3\sin^2\theta\right) = 12gl\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\omega^2 = \frac{12g\left(1-\cos\theta\right)}{l^3\left(1-3\sin^2\theta\right)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{12g\left(1-\cos\theta\right)}{l^3\left(1-3\sin^2\theta\right)}}$$

+らしい

1にならない！

そこまで気にしたことないけど一応

(5) 垂直抗力Nをθの関数で表す。

$$I_0\ddot{\theta} = N\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = l\omega \text{ より } \frac{d^2\theta}{dt^2} = l\dot{\omega}$$

$$I_0 l\dot{\omega} = N\frac{l}{2}\sin\theta$$

のはずなのだが。F様は$I_0\dot{\omega}$にしてる。なんで？？

$$I_0\dot{\omega} = N\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$N = \frac{2I_0}{l\sin\theta}\dot{\omega}$$

ここをθと表せれば終わり

$$\frac{d\omega}{dt} \to \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\omega^2}{d\theta} = \omega\frac{d\omega^2}{d\theta}$$

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2\omega\frac{d\omega}{dt}$$

$$2\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega^2}{d\theta}$$

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = \frac{12g}{l}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1-\cos\theta}{1-3\sin^2\theta}\right]$$

$$= \frac{12g}{l}\frac{(1-\cos\theta)'(1+3\sin^2\theta) - (1-\cos\theta)(1+3\sin^2\theta)'}{(1+3\sin^2\theta)^2}$$

$$= \frac{12}{l}g\frac{\sin\theta(1+3\sin^2\theta) - 6\cos\theta(1-\cos\theta)\sin\theta}{(1+3\sin^2\theta)^2}$$

$$= \frac{12g}{l}\frac{\sin\theta\left[1+3\sin^2\theta - 6\cos\theta(1-\cos\theta)\right]}{(1+3\sin^2\theta)^2}$$

$$N = \frac{2I_0}{l\sin\theta}\frac{d\omega}{dt}$$

代入

$$= \frac{2I_0}{l\sin\theta}\,\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\theta}$$

$$= \frac{M}{\cancel{12}}\cancel{l}^2 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{l\sin\theta}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{12}g}{\cancel{l}}\,\frac{\cancel{\sin\theta}\left[\;\cdots\;\right]}{(1+3\sin^2\theta)^2}$$

$$= Mg \times \frac{1+3\sin^2\theta - 6\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1+3\sin^2\theta)^2}$$

$$= Mg \times \frac{1+3(1-\cos^2\theta) - 6\cos\theta + 6\cos^2\theta}{(1+3\sin^2\theta)^2}$$

$$= Mg \times \frac{4+3\cos^2\theta - 9\cos\theta}{(1+3\sin^2\theta)^2}$$

$v = \frac{l}{t}$

$l = r\theta$ より

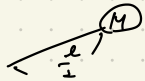
$v = \frac{r\theta}{t}$

$= r\omega$

$v = r\omega$

(5)

(6)



$$\begin{cases} \frac{l}{2}\omega_t = v_t & \leftarrow \text{すべらない} \\ l\omega_t = v_t & \leftarrow \text{すべる} \end{cases}$$

どこから でてきた?

(7) $\frac{Mg}{2} l = Mgy + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

追加

$\longrightarrow$ (イ)