[3] [A]

(1) $\int E\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq$

$\therefore E_f = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ //

$(0 < r < a)$ のとき、

$q = -q \times \frac{r^3}{a^3}$

$\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r^3}{a^3} = \frac{-qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ //

$(r > a)$ のとき

$\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ //

$\vec{p} = q\vec{d}$

(2) 双極子モーメント $\vec{p} = q\vec{d}$ と $E_{ext}$ の比例関係

$\vec{E}_{ext}\cdot\vec{r} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

$\Leftrightarrow \vec{p} = \underbrace{4\pi a^3}_{\alpha}\varepsilon_0 \vec{E}_{ext}$

$\alpha = 4\pi a^3$ //

(3) $\phi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{d}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{d}{2})^2}}\right)$

$\frac{x^2+y^2+z^2-zd+\frac{d^2}{4}}{R^2}$

$R \gg a \gg |d|$ より

$\frac{d^2}{4} \approx 0$ とする

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2-dz}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+dz}}\right]$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{\left(1-\frac{dz}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{dz}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{\left(1+\frac{dz}{2R^2}\right) - \left(1-\frac{dz}{2R^2}\right)\right\}$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{dz}{R^2}$

$z = R\cos\theta$ より

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} d R\cos\theta$

$= \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$

(4) $\vec{p}$ がつくる $\vec{E}_p$ 　 $r\mathbb{e} = \mathbb{r}$, $\mathbb{e} = \dfrac{\mathbb{r}}{r}$

$$\mathbb{E}_p = -\nabla\phi_p = -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbb{p}\cdot\mathbb{r}}{r^3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\mathbb{r}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{r})}{r^5} - \frac{\mathbb{p}}{r^3}\right)$$

でゆこと な

$\mathbb{p}$ に平行な成分が 0

$$\mathbb{E}_p\cdot\mathbb{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\mathbb{p}\cdot\mathbb{r})^2}{r^5} - \frac{\mathbb{p}^2}{r^3}\right) = 0$$

$$\mathbb{p}\cdot\mathbb{r} = pr\cos\theta_1$$

$$\therefore \cos\theta_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(5) 微小電場 $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dQ}{r^2}$

中心からの電場 : $r = b$

$$dQ = \sigma\cdot dr\cdot r\,d\theta\cdot r\sin\theta\,d\phi$$

$$= \sigma r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$