H30 東工大院試 午前

2 [A]

[B] $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$

(2) パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)(G(k))^* dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)(g(k))^* dx$$

を示す

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g(x))^* dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega')^* e^{-i\omega' x} d\omega'\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega')^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ix(\omega-\omega')} dx\, d\omega\, d\omega'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega')^* \delta(\omega-\omega')\, d\omega\, d\omega'$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega')^* (\delta(\omega'-\omega))^* d\omega\, d\omega'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega')^* (\delta(\omega'-\omega))^* d\omega'\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(\omega)^* d\omega$$

//

(3)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$f(x) = e^{-|x|} = e^{x} \quad (x<0)$$

$$f(x) = e^{-x} \quad (x \geq 0)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\omega x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)x}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{(1+i\omega)} e^{-(1+i\omega)x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= +\frac{1}{1+i\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}$$

$$= \frac{2}{1+\omega^2}$$

//

(4) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^2}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^2 dy$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} F(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} \; |F(y)|^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \; dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\infty} e^{-2x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$