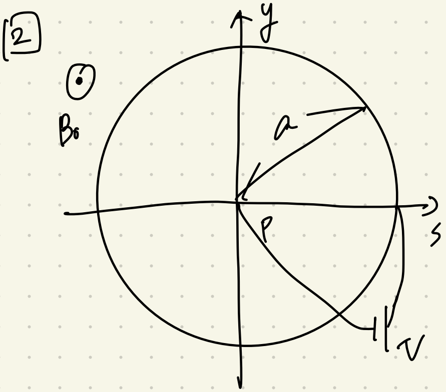
平成31年度 東工大院試

[2]



[A]

(1) ローレンツ力

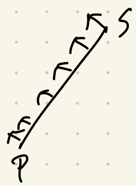
$F = IBl$ より

$|F| = |I\,dS| \times B$

単位長さ より $l = 1$, $dS = 1$

$|F| = IB_0$ //

(2) 力のモーメント



$$N = \int_0^a x\,dx \times F$$

$$= \frac{1}{2}a^2 I B_0 \text{ //}$$

(3) 誘導起電力の大きさ

$V = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ より $d\Phi$ 求める

$d\Phi = B_0\,dS$

磁束の式
$\phi = B \times S$

dSについて

弧の面積は

$a \times a \times \pi \times \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2}a^2\theta = S$

角速度の式
$\dfrac{\theta}{t} = \omega$

$$d\Phi = B_0 \times \frac{1}{2}a^2\,d\theta$$

$$= \frac{B_0 a^2 \omega\,dt}{2}$$

よって

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2}$$

$$|V| = \frac{B_0 a^2 \omega}{2} \text{ //}$$

(4) 回路方程式について

誘導起電力がVと逆向きなので

$V - V' = RI$

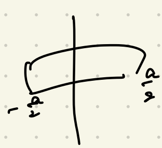
$V - \dfrac{B_0 a^2 \omega}{2} = RI$

$$I = \frac{V - \frac{B_0 a^2 \omega}{2}}{R} \text{ //}$$

(5) 回転運動の式を立てる。

$I\ddot{\theta} = N$

Iの慣性モーメントを求める



の I_G は

$$I_G = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \underbrace{\rho\, dx}_{m}$$

$$= \frac{1}{12}\rho a^3$$

平行軸の定理より

$$I = I_G + m l^2$$

$\downarrow$ $\frac{a}{2}$ ずらす(端点)

$$= I_G + \rho a\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\rho a^3}{3}$$

よって EOM は

$$\frac{\rho a^3}{3}\dot{\omega} = N$$

(2)より

$$N = \frac{1}{2}a^2 I B_0$$

$$\therefore \frac{\rho a^3}{3}\dot{\omega} = \frac{1}{2}a^2 I B_0$$

(4)より

$$I = \frac{V - \frac{B_0 a^2}{2}\omega}{R}$$

$$\frac{\rho a^3}{3}\dot{\omega} = -\frac{a^4 B_0^2}{4R}\left(\omega - \frac{2}{a^2 B_0}V\right)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3a^2 B_0^2}{4\rho R}\left(\omega - \frac{2}{a^2 B_0}V\right)$$

変数分離で解く.

$$\frac{d\omega}{dt} = A(\omega - B)$$

$$\frac{1}{\omega - B}\,d\omega = A\,dt$$

$$\log(\omega - B) = At + C$$

$$\omega - B = Ce^{At}$$

$$\omega = Ce^{At} + B$$ より

$$\omega = C\exp\left(-\frac{3a^2B_0^2}{4\rho R}t\right) + \frac{2V}{a^2B_0}$$

$t \to \infty$ にすると.

$$\underline{\omega \to \frac{2V}{a^2 B_0}}$$

[B]

(6)(ア) EOM をたてる

前回と違うのは

I が V→コンデンサより変数

$$\frac{1}{3}\rho a^3 \cdot \underbrace{\dot{\omega}}_{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{1}{2}a^2 I(t) B_0$$

$$= -\frac{1}{2}a^2 B_0 \frac{dQ(t)}{dt}$$

電流の定義

$$I = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

$\frac{d}{dt}$でくくる

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\rho a^3 \omega + \frac{1}{2}a^2 B_0 Q(t)\right) = 0$$

両辺 t で積分し、

$$\frac{1}{3}\pi a^3\omega(t) + \frac{1}{2}a^2 B_0 Q(t) = C\text{(定数)}$$

$$\omega(t) + \frac{3}{2}\frac{B_0}{\pi a}Q(t) = C$$ //

(イ) $t=0$ と $t=\infty$ のときより
上式を等式で結ぶ

$t=0$

$$\underbrace{\omega(0)}_{\text{速度}=0} + \frac{3B_0}{2\pi a}Q(0)$$

$$= \frac{3B_0}{2\pi a}Q_0$$

$t=\infty$

$$\omega_\infty + \frac{3B_0}{2\pi a}Q_\infty = \frac{3B_0}{2\pi a}Q_0 \quad (t=0)$$

$$Q_\infty = Q_0 - \frac{2\pi a}{3B_0}\omega_\infty$$ //

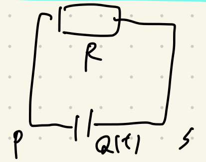
(ウ) コンデンサーは時間がたつと
$Q_\infty = 0$ となるので

$$\therefore\ \omega_\infty = \frac{3B_0}{2\pi a}Q_0$$ //

～ 解法 ～

① 回路方程式より $\frac{dQ}{dt}$ を具体的に
② EOM に代入、ω の式へ
③ ω の微分方程式を解く。

(エ)



R はムシと問題文

$Q=CV$ より

(3)

$$\frac{Q(t)}{C} - \frac{1}{2}a^2 B(t)\omega(t) = 0$$

$$Q(t) = \frac{C}{2}a^2 B(t)\omega(t)$$

$$= \frac{C}{2}a^2 B_1 \sin\omega_1 t\cdot\omega(t)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Ca^2B_1}{2}\left(\omega_1\cos\omega_1 t\cdot\omega(t) + \sin\omega_1 t\cdot\dot\omega(t)\right)$$

EOM

$$\frac{1}{3}a^3\pi\dot\omega = -\frac{1}{2}\cancel{a^2}B_1\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{I}\sin\omega_1 t$$

$$= -\frac{B_1}{2}\sin\omega_1 t\,(\qquad)$$

$$\frac{1}{3}\cancel{a}\pi\dot\omega = -\frac{C}{4}a^2B_1^2(\sin\omega_1 t \times 〃)$$

$$\dot{\omega}(t)\left\{\frac{1}{3}\lambda + \frac{caB_1^2}{4}\sin^2\omega_1 t\right\}$$

$$= -\frac{caB_1^2}{4}\omega_1\cos\omega_1 t\sin\omega_1 t \cdot \omega(t)$$

変数分離より

$$\frac{1}{\omega(t)}d\omega = \frac{-\frac{c}{4}aB_1^2\omega_1\cos\omega_1 t\sin\omega_1 t}{\frac{1}{3}\lambda+\frac{caB_1^2}{4}\sin^2\omega_1 t}\,dt$$

$\sin\omega_1 t = x$ とおくと

$dx = \omega_1\cos\omega_1 t\,dt$ となる。

$$\frac{1}{\omega(t)}d\omega = \frac{-\frac{c}{4}aB_1^2 x\cdot dx}{\underbrace{\frac{1}{3}\lambda+\frac{caB_1^2}{4}\sin^2\omega_1 t}}$$

$$\int_0^t \frac{1}{\omega(t)}d\omega(t)$$

$$= \int_0^x \underbrace{\qquad\qquad}\,dx$$

$\sin\omega_1 t = x$ より

t	$0 \to t$
x	$0 \to x$

$$= -\frac{caB_1^2}{4}\int_0^x \frac{\left(\frac{1}{3}\lambda+\frac{caB_1^2}{4}x^2\right)'}{\frac{1}{3}\lambda+\frac{caB_1^2}{4}x^2}\,dx \times \frac{2}{caB_1^2}$$

$$\ln\frac{\omega(t)}{\omega_0}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{caB_1^2}{4}x^2+\frac{1}{3}\lambda\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\lambda\right)\right\}$$

∴

$$\omega(t) = \frac{\omega_0\sqrt{\frac{1}{3}\lambda}}{\sqrt{\frac{caB_1^2}{4}x^2+\frac{1}{3}\lambda}}$$

//