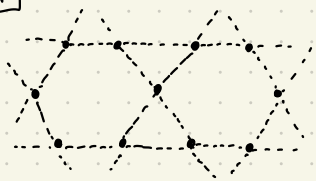
$\boxed{1}$



全格子点数 N

格子点上にスピン配置

格子に関して Ising模型を考える

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle j,k\rangle}\sigma_j\sigma_k - H\sum_j \sigma_j \quad , \ J>0$$

J：最近接格子点のスピン間相互作用エネルギー

スピンの平均値 $= \langle \sigma_j \rangle = m$

$\sigma_j = m + (\sigma_j - m)$ (平均値からのずれ) とし、

平均からのずれ $(\sigma_1 - m), (\sigma_2 - m), \cdots, (\sigma_N - m)$

(1) $\sigma_j = m + (\sigma_j - m)$

$\qquad = m + \delta\sigma_j$

これを $-J\sum_{\langle j,k\rangle}\sigma_j\sigma_k$ に代入

$$-J\sum_{\langle j,k\rangle}\sigma_j\sigma_k = -J\sum\{(m+\delta\sigma_j)(m+\delta\sigma_k)\}$$

$$= -J\sum\{m^2 + m(\delta\sigma_j + \delta\sigma_k) + \underbrace{\delta\sigma_j\delta\sigma_k}_{\text{2次よりムシ}}\}$$

$$= -J\sum\{\underbrace{m^2 + m(\delta\sigma_j + \delta\sigma_k)}_{☆}\}$$

$☆ = m^2 + m(\delta\sigma_j + \delta\sigma_k)$

$\quad = m^2 + m(\sigma_j - m) + m(\sigma_k - m)$

$\quad = -m^2 + m(\sigma_j + \sigma_k)$

$$\therefore -J\sum_{\langle j,k\rangle}\sigma_j\sigma_k$$

$$\approx J\sum_{\langle j,k\rangle}m^2 - Jm\sum_{\langle j,k\rangle}(\sigma_j + \sigma_k)$$

・全ての最近接格子点の数は

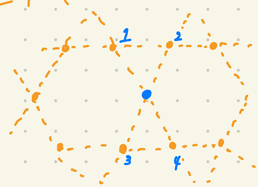
$(z=4$ より$)$

$$zN \times \frac{1}{2} = 2N$$

なんで $\frac{1}{2}$?

↳ペアが2倍に..

最近接点の数が $z=4$



$$\therefore Jm^2\sum_{\langle j,k\rangle} = Jm^2 \cdot 2N$$

$$= 2JNm^2$$

・スピン変数 σ_j は、1つの格子点 j に着目したとき、$z=4$ コのボンドに現れ、

それが $j = 1, 2, \cdots, N$ で成立。

(格子点と格子点を結ぶ辺をボンド)

$$\therefore -Jm\sum_{\langle j,k\rangle}(\sigma_j + \sigma_k) = -4Jm\sum_j \sigma_j$$

↑なんで σ_k も消えた??

$$\mathcal{H}_{MF} = 2JNm^2 - \sum_j \sigma_j (4Jm + H)$$

(MF: mean field : 平均場近似)

(2) 分配関数 Z_{MF} と自由エネルギー F_{MF} を m の関数として求める。

$\log \prod n_i = \sum \log n_i$

$$Z_{MF} = \sum_{\{\sigma_j\}} e^{-\beta H_{MF}}$$

β ってなんだ??

$$\boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}}$$

$$= \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{\beta \sum_j \sigma_j (4Jm + H)} \cdot e^{-2\beta J N m^2}$$

$$= e^{-2\beta J N m^2} \prod_{j=1}^{N} \underbrace{\sum_{\sigma_j = \pm 1} e^{\beta(4Jm+H)\sigma_j}}_{e^{\beta(4Jm+H)} + e^{-\beta(4Jm+H)}}$$

↳ $2\cosh(\beta(4Jm+H))$

N乗はなんでないんだ?

N=1だ!!

$$= e^{-2\beta J N m^2} \{2\cosh(4\beta J m + \beta H)\}^N$$

$$F_{MF} = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{MF}$$

まとめ p91

$F = -kT \log Z$

$= -\frac{\log Z}{\beta}$

$$= -\frac{1}{\beta}(-2\beta J N m^2) + -\frac{1}{\beta} \ln \{2\cosh(4\beta J m + \beta H)\}^N$$

$$= 2JNm^2 - N k_B T \ln\{2\cosh(4\beta J m + \beta H)\}$$

(3) $\langle \sum_j \sigma_j \rangle_{MF} = Nm$ とおくことで m の満たすべき eq

$$\langle \sum_j \sigma_j \rangle = \langle \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_N \rangle$$

期待値は線形性があるので

$$= \langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle + \cdots + \langle \sigma_N \rangle$$

それぞれの $\langle \sigma_1 \rangle$ や $\langle \sigma_2 \rangle$ が等しくなるのが平均場近似であるので

$$= \sum_j \langle \sigma_j \rangle = N \langle \sigma_j \rangle = Nm$$

$$\therefore \langle \sigma_j \rangle = m$$

$\langle A \rangle = \sum P_n A_n$

正準分布関数

$$\therefore \langle \sigma_j \rangle = \sum_{\{\sigma_j\}} \frac{e^{-\beta H_{MF}}}{Z_{MF}} \cdot \sigma_j$$

寄与するのは σ_j の部分のみ。

$$= \frac{\sum_{\sigma_j} \sigma_j e^{\beta \sigma_j (4Jm+H)}}{2\cosh(4\beta J m + \beta H)} \quad \frac{e^{-2\beta J N m^2}}{e^{-2\beta J N m^2}}$$

$$= \frac{e^{\beta(4Jm+H)} - e^{-\beta(4Jm+H)}}{2\cosh(4\beta J m + \beta H)}$$

$$= \frac{\sinh(4\beta J m + H\beta)}{\cosh(4\beta J m + H\beta)}$$

$$= \tanh\{\beta(4Jm+H)\}$$

$$= m$$

$$\therefore m = \tanh \frac{4Jm + H}{k_B T}$$

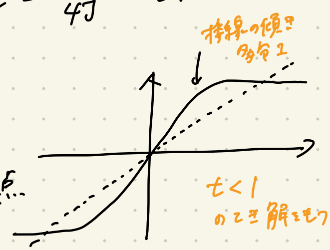
(4) (3) の eq は外部磁場 $H=0$ のとき、ある温度 T_c を境に $T<T_c$ で $m \neq 0$ の解をもつ。T_c を求めよ。

$$m = \tanh \frac{4Jm}{k_B T} \quad (\because H=0)$$

$x = \frac{4J}{k_B T} m$, $t = \frac{k_B T}{4J}$ とおく。

$$tx = \tanh x$$

$$\therefore \begin{cases} y = \tanh x \\ y = tx \end{cases}$$ の交点



$$t = 1 = \frac{k_B T}{4J}$$

$$T_c = \frac{4J}{k_B}$$

(5) $H = 0$

$T \to T_c - 0$ (T_cより低い温度で近づく)

$m \neq 0$ の解の温度依存性は

$|m| \propto (T_c - T)^\beta$

$T_c - T > 0$ が微小パラメータ

$T_c - T = \delta T$ とする。

$$m = \tanh \frac{4J}{k_B T} m$$

$$\boxed{\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3}$$

$$= \tanh \frac{T_c}{T} m$$

$$\approx \frac{T_c}{T} m - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T} m\right)^3$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m^2 = \frac{T_c}{T} - 1$$

$$m^2 = \frac{3\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)}{\left(\frac{T_c}{T}\right)^3}$$

ここで

$$\frac{T_c}{T} = 1 + \frac{T_c - T}{T}$$

$$= 1 + \frac{\delta T}{T}$$

$T \to T_c$ 近づける

$$\approx 1 + \frac{\delta T}{T_c} \quad \text{より}$$

$$m^2 = \frac{3\frac{\delta T}{T_c}}{\underbrace{\left(\frac{T_c}{T}\right)^3}_{\to 1}} \overset{T \to T_c}{=} 3\frac{\delta T}{T_c} = 3\frac{1}{T_c}(T_c - T)$$

$$m = \pm\sqrt{3}\sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$$

$$\propto (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

(6) $T \to T_c + 0$

1スピンあたりの帯磁率 $\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial H}\right|_{H=0}$

の温度依存性は $\chi \propto (T - T_c)^\gamma$

$$m = \tanh \underbrace{\frac{4Jm + H}{k_B T}}_{小さい}$$

$$\approx \frac{4Jm + H}{k_B T}$$

$$m = \frac{H}{k_B T - 4J}$$

$$= \frac{H}{k_B\left(T - \frac{4J}{k_B}\right)}$$

$$= \frac{H}{k_B(T - T_c)}$$

$$\therefore \chi = \left.\frac{\partial m}{\partial H}\right|_{H=0}$$

$$= \frac{1}{k_B(T - T_c)}$$

$$\propto (T - T_c)^{-1}$$

$$\gamma = -1$$