R1　東工大院試 午前

2 [A]

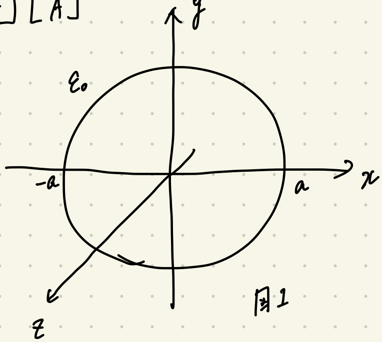


図1

電荷密度 ρ ($\rho>0$) の電荷が原点Oを中心とした半径aの球内に一様分布.

(1) 原点Oからの距離rにおける電場の大きさ $E(r)$

$$Q=\int_0^a \rho\, dv$$

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dv=4\pi r^2\, dr$$

$$Q=\int_0^a \rho\, 4\pi r^2\, dr$$

$$=4\pi\rho\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a$$

$$=\frac{4\pi\rho}{3}a^3$$

$$E=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$=\frac{1}{\cancel{4\pi}r^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\cancel{4\pi}\rho}{3}a^3$$

$$=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 一様電荷とその周りの空間を含む系全体が持つ静電エネルギーUを求めよ.

$$U=\int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, dv$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, dv$$

$$dv=\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'$$

$$=\frac{4}{3}\pi\, 3r^2\, dr$$

$$=4\pi r^2\, dr$$

$$=\frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\int_0^a \frac{\rho a^3}{3\cancel{\varepsilon_0}\cancel{r^2}}4\pi \cancel{r^2}\, dr$$

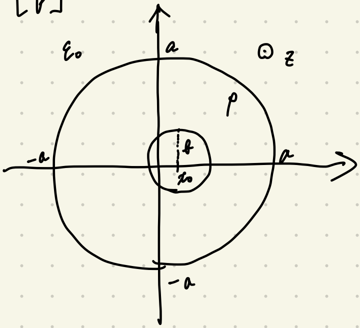
$$=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{\rho a^3 4\pi}{3}\, dr$$

$$=\frac{2}{3}\rho a^3\pi\cdot a$$

$$=\frac{2}{3}\rho a^4\pi$$

//

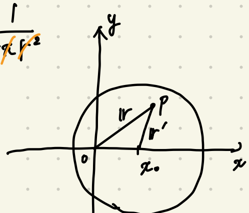
[B]



(3) 空洞内、任意点 $P(x, y, z)$ における
電場の x, y, z 成分 E_x, E_y, E_z

・半径 a の球に ρ が一様分布

$$4\pi r^2 E_a = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$
$$E_a = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\frac{\cancel{4}}{3}\pi r^{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{4}\pi \cancel{r^2}}$$
$$= \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$



$$\Longrightarrow\quad \mathbf{E}_a = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}$$

・半径 b の球に −ρ が一様分布した場合.

$$4\pi r'^2 E_b = \frac{4}{3}\pi r'^3 \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$
$$E_b = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} r'$$
$$\Longrightarrow\quad \mathbf{E}_b = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}'$$

$\mathbf{r}'$(空洞中心からのベクトル)を定義することで対称性が守られ、ガウスの法則が適用できる

ここで $\mathbf{r}'$ は

$\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}'$ とかけるので

$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{x}_0$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(x_0, 0, 0)$$

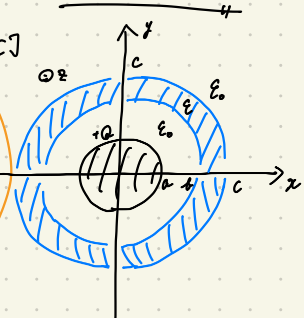
(4) 空洞内部全体の静電エネルギー U_{in} を求めよ

内部エネルギー密度

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E|^2$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho x_0}{3\varepsilon_0}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\rho^2 x_0^2}{9\varepsilon_0^2}$$
$$= \frac{\rho^2 x_0^2}{18\varepsilon_0}$$

$$\therefore U_{in} = \int \frac{\rho^2 x_0^2}{18\varepsilon_0}\,dv$$
$$= \frac{\rho^2 x_0^2}{\cancel{18}_{9}\,\varepsilon_0}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\pi b^3$$
$$= \frac{2\rho^2 x_0^2 \pi b^3}{27\varepsilon_0}$$

[C]



(5) 原点 O からの距離 r の点、
電束密度の大きさ $D(r)$
電場の大きさ $E(r)$

$$\int D\,ds = Q$$

$$\int E\,ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$0<r<a$ のとき $\rightarrow Q=0$

$$D(r)=0$$
$$E(r)=0$$

$a<r<b$ のとき。

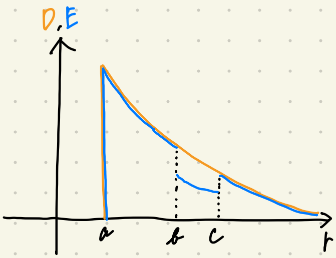
$$D(r)=\frac{Q}{4\pi r^2}$$
$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$b<r<c$ のとき。

$$D(r)=\frac{Q}{4\pi r^2}$$
$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$c<r$ のとき

$$D(r)=\frac{Q}{4\pi r^2}$$
$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



(6) 誘導作用では分極 が起こる。
誘導体 の原点Oに近い 内側の面に誘起 される
分極電荷面密度 σ を求めよ

$$D=\varepsilon_0 E + P$$

単位体積当たりの双極子モーメント
⟶ 誘電分極, 分極ベクトル

$$P = D-\varepsilon_0 E$$
$$=(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}$$

誘電体の誘電率 ε

$$=\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}$$

⟷ 問題集 P42 12.1

$$\sigma = P\cdot n$$
$$=\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}$$

(7) この系は孤立したコンデンサとみなせる
静電容量 C を求めよ。

$$Q = C\underset{\sim}{V}$$ 先に求める

$$V = -\int_\infty^a E\,dr$$
$$=\int_a^b E\,dr + \int_b^c E\,dr + \lim_{d\to\infty}\int_c^d E\,dr$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b r^{-2}\,dr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_b^c r^{-2}\,dr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_c^d r^{-2}\,dr$$
$$=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)-\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{c}\right)$$
$$=\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{c}\right]$$

$Q=CV$ より

$$C=\frac{Q}{V}$$

よって

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{c}\right]}$$