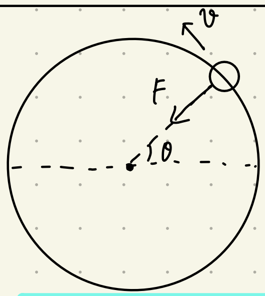
# 2018年　都立大学　力学

## 1 問1




極座標 の EOM
(r方向)
$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r$
(θ方向)
$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=F_\theta$

└→ 今回は $F_\theta=0$

(1) $x=l\theta$

$v=l\dot{\theta}=l\omega_0$

角運動量 L は.

$L=l\cdot mv=ml^2\omega_0$

中心力のみだからr方向だけ考える

$F=-\mathrm{grad}\,U(r)$

$=-\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(-\frac{a}{r^n}\right)$

$=\frac{\partial}{\partial r}\frac{a}{r^n}$

$=-\frac{na}{r^{n+1}}$

r方向のEOMで　r=l とおくと.

$m(\cancel{\ddot{l}}-l\omega_0^2)=-\frac{na}{l^{n+1}}$

$\omega_0^2=\frac{na}{ml^n}$　　$\therefore\ \omega_0=\sqrt{\frac{na}{ml^n}}$

$\therefore\ T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{ml^n}{na}}$

$\therefore\ \begin{cases} v=l\sqrt{\frac{na}{ml^n}} \\ L=l\sqrt{\frac{mna}{l^n}} \end{cases}$

$E=\frac{1}{2}mv^2+U(l)$

$=\frac{(nl^2-2)a}{2l^n}$ //

(2) $E=\frac{1}{2}mv^2+U(r)$

$x=r\theta$
$v_\theta=r\dot{\theta}$

$\left(\because\ v^2=v_r^2+v_\theta^2=v_r^2+r^2\omega^2\right)$

$E=\frac{m}{2}(v_r^2+r^2\omega^2)-\frac{a}{r^n}$

ここで $L=mr^2\omega=\mathrm{const}$ より

$\omega=\frac{L}{mr^2}$

$\therefore\ E=\frac{m}{2}v_r^2+\underbrace{\left(\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{a}{r^n}\right)}_{U_{eff}(r)}$

(3) $U_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{a}{r^n}$

$U_{eff}'(r)=-\frac{L^2}{mr^3}+\frac{na}{r^{n+1}}$

$U_{eff}''(r)=\frac{3L^2}{mr^4}-\frac{(n+1)na}{r^{n+2}}$

$U_{eff}(r)\fallingdotseq\frac{1}{0!}U_{eff}(l)(r-l)^0+\frac{1}{1!}U_{eff}'(l)(r-l)^1$

$+\frac{1}{2!}U_{eff}''(l)(r-l)^2$

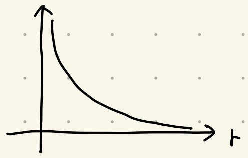
$=\frac{L^2}{2ml^2}-\frac{a}{l^n}+\left(-\frac{L^2}{ml^3}+\frac{na}{l^{n+1}}\right)(r-l)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{3L^2}{ml^4}-\frac{(n+1)na}{l^{n+2}}\right)(r-l)^2$ //

(4) $U_{eff}=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{a}{r^n}$

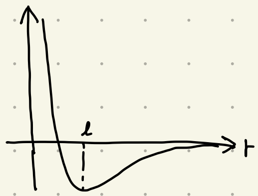
n=2のとき

$U_{eff}\propto\frac{1}{r^2}$




n=1のとき

$U_{eff}'=0$ となる極値を求める




$\left.\frac{dU_{eff}}{dr}\right|_{r=l_1}=0$ より

$\frac{L^2}{ml_1^3}=\frac{na}{l_1^{n+1}}$

$\therefore\ l_1^{2-n}=\frac{L^2}{mna}\Rightarrow l_1=\left(\frac{L^2}{mna}\right)^{\frac{1}{2-n}}$

n=2は不適
n=1は極値である

n=1 のとき EOMは

$m\ddot{r}=-\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}$

$=-\frac{\partial}{\partial r}\left[U(l_1)+U'(l_1)(r-l_1)+\frac{U''(l_1)}{2}(r-l_1)^2\right]$

$=-\frac{U_{eff}''}{2}2(r-l_1)$

$=-U_{eff}''(l_1)(r-l_1)$

$r\to r+l_1$ とおいて

$\ddot{r}=-\underbrace{\frac{U_{eff}''(l_1)}{m}}_{=\omega^2}r$

ωで単振動する