2021年　都立大学　冬期　数学

1 (1) $\frac{1}{2}(e^{iz}-e^{-iz})=2$

$t=e^{iz}$ とおく.

$\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})=2$　$t^2-1=4t$　$t^2-4t-1=0$

(2) $t=(2\pm\sqrt{3})i=e^{iz}$

$\log e^{iz}=\log(2\pm\sqrt{3})i$

$iz=\log i+\log(2\pm\sqrt{3})$

$i(x+iy)=\log(2\pm\sqrt{3})+\log i$

$-y+ix=\log(2\pm\sqrt{3})+\log i$

$ix=\log i$　$e^{ix}=i$　1.5.9

$\cos x+i\sin x=i$　$y=-\log(2\pm\sqrt{3})$

$\sin x=1$

$x=\frac{(4n+1)\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\cdots)$

$x=\frac{\pi}{2}$

2 (1) $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} a+\frac{b}{2}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b & a-\frac{b}{2}-\lambda \end{pmatrix}=(a-\lambda)^2-\frac{b^2}{4}-\frac{3}{4}b^2$

$=(a-\lambda)^2-b^2=0$

$a-\lambda=\pm b$

$\lambda=a\mp b$　$\lambda_1=a-b$

$\lambda_2=a+b$

(2) $\lambda=a-b$ のとき

$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}b & \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b & \frac{b}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$3x+\sqrt{3}y=0$　$x=k$ とおく. $y=-\frac{3}{\sqrt{3}}k=-\sqrt{3}k$　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

規格化して. $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\lambda=a+b$ のとき

$\frac{b}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x+\sqrt{3}y=0$　$y=k$ のとき. $x=\sqrt{3}k$　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3}k \\ k \end{pmatrix}$

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$　$\therefore U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$