① $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(1) $\det|A - \lambda I| = \det \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix}$

$= (6-\lambda)^2 - 9$

$= 36 - 12\lambda + \lambda^2 - 9$

$= \lambda^2 - 12\lambda + 27 \qquad \lambda_1 = 3$

$= (\lambda - 3)(\lambda - 9) \qquad \underline{\lambda_2 = 9}$

(2) $\lambda_1 = 3$ のとき

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 　　 $x + y = 0$
　　　　　　　　　　　　　　 $x = t$ とする.
　　　　　　　　　　　　　　 $y = -t$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 　　 $t = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$

$\underline{= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$
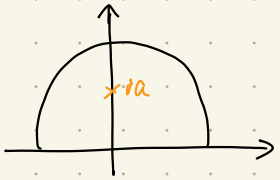
$\lambda_2 = 9$ のとき

$\lambda_2 = 9$ のとき.

$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 　　 $x = t$ とする.
　　　　　　　　　　　　　　 $y = t$
　　　　　　　　　　　　　　 $t = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$

$\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

(3) $\underline{U = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

② (1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2} = \dfrac{1}{(z + ia)(z - ia)}$

$\underline{z = ia, \ -ia}$

(2) $\displaystyle \int_C \dfrac{dz}{(z + ia)(z - ia)}$

$= 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(ia, \dfrac{1}{z^2 + a^2}\right)$

$\left(\mathrm{Res}\left(ia, \dfrac{1}{z^2 + a^2}\right) = \lim_{z \to ia} \dfrac{1}{0!} \dfrac{d^0}{dx^0}(z - ia)\dfrac{1}{(z - ia)(z + ia)} \right)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{1}{2ia}$

$= 2\pi i \dfrac{1}{2ia} = \underline{\dfrac{\pi}{a}}$