第 1 回

中央大学大学院試験対策模試

物 理 学 科

（ 問 題 ）

2022 年度

注 意 事 項

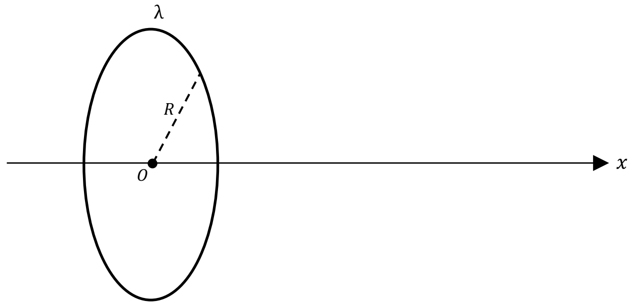
1. 問題用紙及び解答用紙は，試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は 4~15 ページに記載されている。問題用紙や解答用紙の印刷が不鮮明であったり，ページが抜けていたり，汚れていたりしていることに気づいた場合は，手を挙げて監督員に伝えること。
3. 解答は全て解答用紙の所定欄に HB のシャープペンシルで記入すること。
4. 受験番号及び氏名は，試験が開始してから，解答用紙の所定欄に正確に丁寧に記入すること。読みづらい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので，注意すること。

数 字 見 本	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5. 導出過程を明示する問題は，計算の過程（式の変形や考え方）もわかりやすく簡潔に書くこと。
6. 分数は，それ以上約分できない形で答えること。
7. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答を止め，筆記具を置くこと。終了の指示に従わず，解答を続けた場合は，答案の全てを無効とするので注意すること。
8. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

配点	
Ⅰ～Ⅶ	各 20 点
Ⅷ	60 点
合計	200 点

Ⅰ 図のように、固定された半径 R の細い輪の上に線電荷密度λの電荷が一様に分布している。以下の問いに答えなさい。



(1) 輪の中心を通りの面に垂直に軸(輪の中心を原点とする) をとるとき、x軸上の電場$E(z)$を求めなさい。ただし、電場は右向きを正とする。解答では導出過程を明示すること。

(2) x軸上を運動する質量m、電荷$q(q > 0)$の質点がある。この質点を、原点から微小距離$x(0 < x \ll R)$だけ離れた位置に置いて静かに離した。このとき、(a)$\lambda > 0$、(b)$\lambda < 0$のそれぞれの場合について、その後の質点の運動について簡単に述べなさい。ただし、荷電粒子の加速度運動にともなう電磁波の放射は無視できるとする。

(3) 上記(a)、(b)のそれぞれの場合について、直線運動ならば加速度の最大値を、振動運動ならばその振動数を、その他の運動ならばその運動の特徴を表す物理量を求めなさい。ただし、導出過程を明示すること。

II　区間$[-\pi, \pi]$において定義された連続な実関数$f(x)$を、三角関数を用いて

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \tag{1}$$

のように展開する。これをフーリエ級数展開という。ただし、式(1)の右辺は収束するとする。以下の問いに答えなさい。

(1)一般の$f(x)$に対する展開係数a_n, b_nを求めなさい。

(2)パーセバルの恒等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

を示しなさい。

(3)関数$f(x) = x^2 (-\pi < x \leq \pi)$に対する展開係数$a_n, b_n$を求め、$f(x)$をフーリエ級数展開しなさい。

(4)(3)の結果を利用することにより、無限級数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

を求めなさい。

Ⅲ 波動関数を $\psi(x,t)$、ポテンシャルエネルギーを $V(x)$、質量をmとすると、1 次元のシュレディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = i\hbar\dot{\psi}$$

と書くことができる。ここで、$\psi(x,t), m, V(x)$は波動関数、粒子の質量、ポテンシャルエネルギーをそれぞれ表す。ただし、ここでは $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$、$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$ のように偏微分記号を省略して表した。

以下では、波動関数の振幅が一部に局在した波束を考えてみよう。波束の場合は、ψおよびその任意階の導関数は $x \to \pm\infty$で 0 とみなしてよいものとする。

波動関数の定義から、位置の期待値は、

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx$$

と書くことができる（ψ^*はψの複素共役）。

（1）一般に $x \to \pm\infty$で 0 となる微分可能な関数 $f(x), g(x)$について、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f' g dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f g' dx$$

が成り立つことを示しなさい。

（2）運動量の期待値 $m\frac{d}{dt}\langle x \rangle$が、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi dx$$

と書けることを示しなさい。

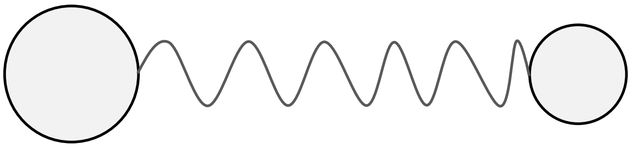
（3）上式をさらにtで微分することにより、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-\frac{\partial}{\partial x}V\right) \psi dx$$

が成り立っていることを示し、この式の物理的意味について説明しなさい。

IV いくつかの振動子系について、以下の問いに答えなさい。

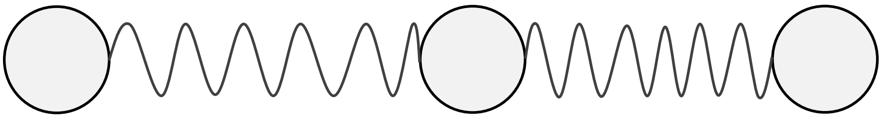
図 1



(1) 図 1 のように摩擦のない水平面状に、質量m_1の質点 1 と質量m_2の質点 2 がばね定数kのばねでつなげられている。ばねの伸縮方向の運動だけを考え、質点 1 と 2 の座標をそれぞれx_1、x_2とする。x_jの時間微分を$\dot{x_j}$とおくと、運動エネルギーは$\frac{m_1}{2}\dot{x_1}^2+\frac{m_2}{2}\dot{x_2}^2$、位置エネルギーは$\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2$である。この系の Lagrangian を現しなさい。

(2) 問 1 の系に対して、Lagrange の運動方程式を解いて、4 つの定数を含む一般解を求めなさい。この際、質量の和$M=m_1+m_2$、換算質量$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$、重心座標$X=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$、相対座標$x=x_1-x_2$を用いてもよい。

図 2



(3) 図 2 のように摩擦のない水平面状に、質量mの 3 つの質点 1、2、3 があり、質点 1 と 2、および質点 2 と 3 がそれぞればね定数kのばねで直線上につなげられていて、その線状でのみ運動できるとする。質点 1、2、3 の座標をそれぞれx_1、x_2、x_3とする。このとき、運動エネルギー$\frac{m}{2}(\dot{x_1}^2+\dot{x_2}^2+\dot{x_3}^2)$は、位置エネルギーは$\frac{k}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2]$と表される。3 つの座標に対する運動方程式を導きなさい。

(4) 問 3 の運動方程式の一般解を求めなさい。ここで、問 2 のヒントのように、座標x_1、x_2、x_3の線形結合を適当にとり、それぞれが独立な運動をしているような形に表しなさい。

V 以下の問いに答えなさい。ただし、真空の誘電率および透磁率をそれぞれε_0, μ_0とし、ベクトルについて聞かれている場合には、大きさと方向が分かるように答えなさい。

① 半径Rの導体球を$+q$（ただし$q > 0$）に帯電させ、真空中に置いた。導体球の中心を座標の原点として、以下の問いに答えなさい。

(1) この場合における位置ベクトル$\vec{r} = (x, y, z)$での電場を求めなさい。また電場の大きさ$E(\vec{r})$を原点からの距離rの関数として求め、そのグラフを描きなさい。

(2) この場合における、位置ベクトル$\vec{r}$での電位$\phi(\vec{r})$を原点からの距離の関数として求め、そのグラフを描きなさい。ただし、電位は無限遠方で0とする。

(3) 上の設問①-(1)および①-(2)をヒントとして、電荷分布が変化しない定常的な状態での導体について、常に成り立っている電磁気的な特徴を以下の選択肢から、全て選びなさい。

（ア）導体内部の電場は導体表面から内部に進むに従って減少する。
（イ）導体内部の電場は導体表面から内部に進むに従って増加する。
（ウ）導体内部の電場は0である。
（エ）電荷は導体表面に分布する。
（オ）電荷は導体内に一様に分布する。
（カ）導体表面では電気力線は面に垂直に交わる。
（キ）導体表面では電気力線は面に沿っている。
（ク）導体表面では電位が等しい。

(4) この系の静電エネルギーを答えなさい。

② 真空中に広い平らな導体が置かれ、点電荷$+q$を距離dだけ離して置いた。点電荷から導体に下ろした垂線が導体表面にぶつかる点を原点とし、z軸座標を図のように垂線上に取った。図は系をy軸の負の方向から眺めたものである。点電荷の位置ベクトルを$\vec{r} = (x, y, z) = (0,0, +d)$とし、導体は$z \leq 0$に存在するとする。$q > 0$として、以下の問いに答えなさい。

(1) 上の設問①-(3)の状態はこの場合の導体にも当てはまる。電気力線の様子を図に描きなさい。

(2) 導体の表面および外部の領域に作られる電場は、導体の代わりにいくつかの点電荷をしかるべき位置に配置することによっても作られる。その点電荷の配置を図に描き、それぞれの点電荷の電荷量と位置ベクトルを答えなさい。

(3) 導体のある位置ベクトル$\vec{r} = (x, y, 0)$における電場のz成分$E_z(\vec{r})$を求めなさい。解法は複数あるが、もし必要があれば、$\frac{d(r^n)}{dx} = nxr^{n-2}$を用いても良い。

(4) 導体表面上のある位置ベクトル$\vec{r} = (x, y, 0)$に誘導された電荷密度$\sigma(\vec{r})$を求めなさい。

(5) 導体の表面および外部の領域内の、ある位置ベクトル$\vec{r} = (x, y, z)$における電位$\phi(\vec{r})$をx, y, z, dなどを用いて表しなさい。ただし、電位は無限遠方で0とする。

(6) 導体の表面および外部の領域内で、かつ$r \gg d$を満たす位置ベクトル$\vec{r} = (x, y, z)$における電位$\phi(\vec{r})$を近似して求めなさい。

VI 質量mの質点に、ある定点Oを力の中心とした中心力がはたらいているものとする。Oを原 点として質点の位置ベクトルを$\vec{r}$とする。原点からの距離は$r = |\vec{r}|$で与えられる。

（1）中心力$\vec{F}$は一般に

$$\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r} \qquad ①$$

で表される。ただし、$F = \left|\vec{F}\right|$である。質点の速度ベクトルを$\vec{v}$とすると、Oの周りの角運動量は$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$で与えられる。

(i) $\vec{\ell}$ =一定であることを示せ。

(ii)このことから、質点は原点Oを含む平面内で運動することを証明しなさい。

（2）以下では、質点にはたらく力の大きさ$F(r)$は質点の質量mに比例し、$F(r) = mf(r)$と書ける場合を考えることにする。運動平面内に 2 次元極座標(r, θ)をとると、質点の運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = mf(r) \qquad ②$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \qquad ③$$

与えられる。③式から直ちに$r^2\frac{d\theta}{dt}$は定数であることが分かるので、以下では

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h = \text{一定} \qquad ④$$

とする。④式を用いて変数変換$t \to \theta$を行うと、②式は次式に書き直せることを示しなさい。

$$\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h^2}{r^3} = f(r) \qquad ⑤$$

(3) $u = \frac{1}{r}$によって$r \to u$の変数変換を行い、⑤式からuに対する微分方程式を導きなさい。答えは$u, \theta, h, f\left(\frac{1}{u}\right)$で表されることになる。

(4) aを定数として、以下では特に$f\left(\frac{1}{u}\right) = -ah^2u^2$である場合を考えることにする。このとき、(3)で導いた微分方程式を以下の 2 つの条件の下で解きなさい。ただし、bは定数である。

$$\left.\frac{du}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \qquad \left.\frac{d^2u}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = -ab \qquad ⑥$$

(5) $u = \frac{1}{r}$によって、(4)で求めた解から、rとθの間に成り立つ関係式を導きなさい。

(6) (5)の関係式から、この質点の軌道は運動平面上でどのような曲線によって表されるか答えなさい。曲線の種類が複数考えられる場合には、それらをすべて答えなさい。また、複数ある場合には、その場合分けは何によって決まるのか答えなさい。

Ⅶ 絶対温度Tの熱平衡状態にあるN粒子系を考える。この系がエネルギーEの状態にある確率密度が

$$p(E) = C(N)E^{\frac{3N}{2}-1}e^{-\frac{E}{k_BT}} \qquad ①$$

で与えられるものとする。ただし、$E \geq 0$とする。ここでk_Bはボルツマン定数である。また、$C(N)$は規格化因子であり、

$$\int_0^\infty p(E)dE = 1 \qquad ②$$

となるように定める。

(1) ①式において、 $E^{\frac{3N}{2}-1}$ はEの増加関数であり $e^{-\frac{E}{k_BT}}$ はEの減少関数である。よって、その積で与えられる$p(E)$はあるエネルギーの値$\mathrm{E} = E^*$で最大値を示すことになる。E^*は $\dfrac{dp(E)}{dE} = 0$ となるEとして求めることができる。E^*をN、k_BTを用いて与えなさい。

(2) 規格化因子$C(N)$は②式より、

$$C(N)^{-1} = \int_0^\infty E^{\frac{3N}{2}-1}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE \qquad ③$$

で与えられる $\dfrac{E}{k_BT} = x$ によって積分変数をEからxに変えると、

$$C(N)^{-1} = (k_BT)^{\frac{3N}{2}}I\left(\frac{3N}{2} - 1\right) \qquad ④$$

となることを示せ。ただし、

$$I(n) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx \qquad ⑤$$

である。

(3) 部分積分をすることにより、⑤式で定義された積分は、次の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$I(n) = nI(n-1)$$

(4) $I(0) = \int_0^\infty e^{-x}dx$ を計算することにより$I(n)$、$n = 0$、1、2を求めよ。 その結果より、$C(N)$をN、k_BTを用いて与えなさい。ただし、Nが偶数である場合のみ考えれば良いものとする。

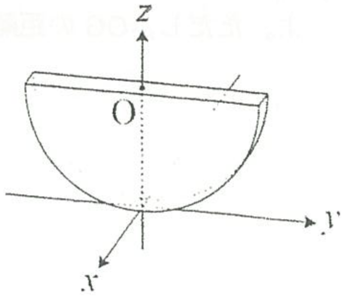
(5) エネルギーEの平均値 $\langle E \rangle = \int_0^\infty Ep(E)dE$ を求めよ。答えはN、k_BTを用いて与えよ。

（6）粒子数Nを無限大とする極限では $\lim_{N\to\infty}\frac{\langle E\rangle}{E^*}=1$ となる。このことは何を意味しているか答えなさい。

Ⅷ

半径a，質量Mの一様な半円柱が，図１のように粗い水平面（xy面）上に置かれている。半円柱の厚さは十分薄く，これをyz面内に置かれた半円板とみなすことができるものとする。この半円板はyz面内で水平面上を滑らずに回転し，その際の摩擦による仕事は無視できるものとする。重力加速度をgとして，以下の問いに答えよ。

図１

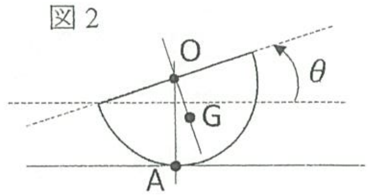


(1) 半円板の弦の中点Oを通り，x軸に平行な軸に関する，半円板の慣性モーメントI_0を求めよ。

(2) 半円板の重心をGとする。OGの距離ℓを求めよ。

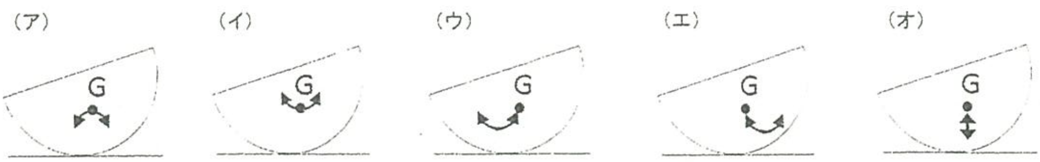
図２のように，yz面内で半円板の弦が水平となす角度を，反時計回り方向を正としてθで表すことにする。また,各瞬間の半円板の接地点をAと呼ぶことにする。はじめに半円板を水平から反時計回りに角度θ_0だけ傾けてから静かに手を離したところ，半円板は滑らずに運動を開始した。

図２



(3) この運動中に，yz面内で半円板の重心Gが描く軌跡の概略を矢印付きの線で示した図として，最も適当なものを図３の中から選んで記号で答えよ。ただし図中に描かれている半円板ならびに点Gは，はじめに半円板を角度θ_0だけ傾けたときのものを表している。

図３



(4) $\theta=0$における接地点の回りの半円板の慣性モーメントを$I_A(0)$として，$\theta=0$となった瞬間の半円板の重心Gの速さv_Gを求めよ。ただし，OGの距離はℓとおくこと。

(5) 半円板の角度がθとなった瞬間の，接地点の回りの半円板の慣性モーメント$I_{\mathrm{A}}(\theta)$を求めよ。ただし，OGの距離はℓとおくこと。

(6) θ_0が小さいとき，半円板は周期的な微小振動を行う。この振動の角振動数ωを求めよ。ただし，OGの距離はℓとおくこと。