第 2 回

中央大学大学院試験対策模試

物 理 学 科

（ 問 題 ）

2022 年度

注 意 事 項

1. 問題用紙及び解答用紙は，試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は 4~11 ページに記載されている。問題用紙や解答用紙の印刷が不鮮明であったり，ページが抜けていたり，汚れていたりしていることに気づいた場合は，手を挙げて監督員に伝えること。
3. 解答は全て解答用紙の所定欄に HB のシャープペンシルで記入すること。
4. 受験番号及び氏名は，試験が開始してから，解答用紙の所定欄に正確に丁寧に記入すること。読みづらい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので，注意すること。

数 字 見 本	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5. 導出過程を明示する問題は，計算の過程（式の変形や考え方）もわかりやすく簡潔に書くこと。
6. 分数は，それ以上約分できない形で答えること。
7. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答を止め，筆記具を置くこと。終了の指示に従わず，解答を続けた場合は，答案の全てを無効とするので注意すること。
8. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

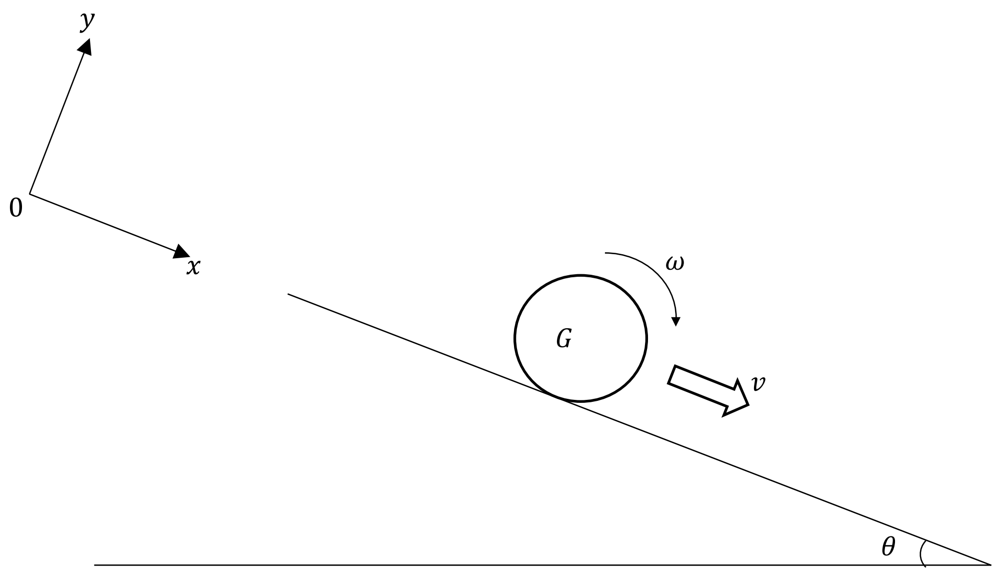
配点	
Ⅰ～Ⅷ	各 25 点
合計	200 点

I　自然長ℓ_0バネ定数kのバネに付けた質量mの重りＰが滑らかなx軸上で、復元力$-kx$、速度vに比例する空気抵抗$-Bv(B > 0)$を受けて 減衰振動を行うものとする。このＰに外部から振動する力$f_0 \cos \omega t$をx軸方向に加えるとき、Ｐの位置$x(t)$は、

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \gamma \cos \omega t \quad \cdot\cdot\cdot ① \left(a = \frac{B}{m}, b = \frac{k}{m}, \gamma = \frac{f_0}{m}\right)$$

をみたすことを示せ。また、①の一般解$x(t)$を求めよ。

Ⅱ 図に示すように、水平面とθの角をなす斜面上を、質量M、半径aの薄い厚さをもつ球殻が転がっていくものとする。斜面と球殻の間にはまさつ力があり、球殻が斜面を滑ることなく回転するものとする。このとき、球殻の重心Gのx軸方向の加速度αと球殻に働くまさつ力fを求めよ。また、時刻$t = 0$のとき$v = 0$, $\omega = 0$の状態から、この球殻がこの斜面を落差Hだけ転がったときの速度vを求めよ。ただし、ωは球殻の角速度、vは球殻の重心Gのx軸方向の速度とする。



III

フーリエ変換とは複素フーリエ積分に出てくる関数 $F(\omega)$ のことであるが、物理や工学でしばしば重要な役割を果たす。その性質を学んでおこう。

$(-\infty,\infty)$ で定義され、たかだか有限個の不連続点をもつ絶対積分可能な関数 $f(x)$ に対して、次の式で定義される $F(\omega)$ を $f(x)$ の**フーリエ変換**（Fourier transform）という。

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \qquad ①$$

書物によっては、上の定義に出てくる係数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ が 1　だったり $\frac{1}{2\pi}$ だったりすることがあるので注意が必要である。

フーリエ変換が存在する二つの関数 $f(x)$ および $g(x)$ から構成される次の積分を $F(\omega)$ と $G(\omega)$ の**たたみ込み**(あるいは**合成積**)(convolution)という。

$$(f*g)(x)\coloneqq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \qquad ②$$

たたみ込みのフーリエ変換は、元の関数 $f(x)$ および $g(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ および $G(\omega)$ の積である。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)e^{-i\omega x}dx=F(\omega)G(\omega) \qquad ③$$

次の関係はパーセバルの等式のフーリエ積分版である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)^*\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)^*\,d\omega \qquad ④$$

(1) ③を証明しなさい

(2) ④を証明しなさい

(3)

$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ の関数にパーセバルの等式を適用して $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega$ の値を求めよ。

Ⅳ **アインシュタインの個体モデル**は、N原子から成る個体を、$3N$原子の独立な調和振動子の集まりで近似するものである。

(1) 絶対温度Tのカノニカル分布を考える。分配関数は

$$Z_N = \left(\frac{e^{-\frac{h\nu}{2k_BT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k_BT}}} \right)^{3N}$$

で与えられることを説明せよ。

(2) 固体中の原子数密度$\rho = N/V$を一定として、熱力学極限Vをとりヘルムホルツの自由エネルギー密度$f(T)$ を求めよ。そして、熱力学関係式よりエントロピー密度$s\,(T)$を導け。

(3) アインシュタインの固体モデルによると、単位体積当りの固体の定積比熱は

$$\bar{c}_V = \rho k_B \frac{3\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{\Theta_E}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\Theta_E}{T}}\right)^2}$$

で与えられることを示せ。 ただし,ここで、

$$\Theta_E = \frac{h\nu}{k_B}$$

である。またのグラフを $\frac{T}{\Theta_E}$ を横軸にとって描け。その際、低温 $\frac{T}{\Theta_E} \to 0$ での様子と高温 $\frac{T}{\Theta_E} \to \infty$ での様子に注意せよ。

V

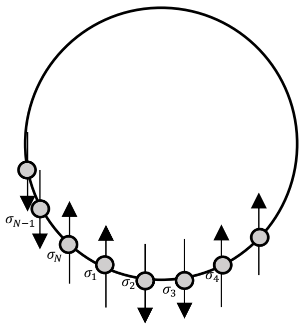
1次元イジング模型では、2番目から $N-1$ 番目までのスピン $\sigma_j, 2 \leqq j \leqq N-1$ は両隣りのスピン $\sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}$ と相互作用しているが、両端のスピン σ_1 と σ_N はいずれも片方の隣にはスピンはないので、1つのスピンとしか相互作用していない。このような状況を**開境界条件**という。

これに対して、図のように円周上にスピンを並べて、σ_1 と σ_N が相互作用するようにしたとき、系は**周期的境界条件**を満たすという。つまり、$\sigma_{N+1} = \sigma_1$ と見なして、N 個すべてのスピン $\sigma_j, 1 \leqq j \leqq N$ が両隣りのスピン $\sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}$ と相互作用するようにしたものである。円周も線であるから、このモデルも1次元イジング模型である。

ここでは、隣接スピン間相互作用を表す J_j は正の一定値 $J>0$ とする。また、一様な磁場 H がかけられていて、ハミルトニアンにはゼーマンエネルギーの項もあり、

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma}, H) = -J\sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sigma_{j+1} - \mu_B H \sum_{j=1}^{N} \sigma_j$$

で与えられる場合を考えることにする。絶対温度 T の熱平衡状態にある周期的境界条件の下での1次元イジング模型を詳しく調べることにしよう。



周期的境界条件を課した 1 次元イジング模型。N 個のスピン $\sigma_j = \pm 1, 1 \leqq j \leqq N$ が円周上に並んでいる。

(1) 2つのスピン変数 σ, σ' に対して

$$h(\sigma, \sigma') = -J\sigma\sigma' - \mu_B H \frac{1}{2}(\sigma + \sigma')$$

という2体力ハミルトニアンを定義すると、ハミルトニアンは、これをすべての隣接スピン対にわたって

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma}, H) = \sum_{j=1}^{N} h(\sigma_j, \sigma_{j+1})$$

いうように足し合わせることによって与えられる。よって、

$$t_{\sigma\sigma'} = e^{-\frac{h(\sigma,\sigma')}{k_B T}}$$

おくと、ボルツマン因子 $e^{-\frac{\mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma})}{k_B T}}$ はこれの積で与えられるので、分配関数は

$$Z_N(T, H) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} e^{-\frac{\mathcal{H}(\boldsymbol{\sigma},H)}{k_B T}} = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{j=1}^{N} t_{\sigma_j \sigma_{j+1}}$$

と表せる。

スピン変数 σ, σ' はそれぞれ2値 ± 1 をとるので、$t_{\sigma\sigma'}$ は $t_{11}, t_{1-1}, t_{-11}, t_{-1-1}$ の4つの場合がある。これを次のように2×2の行列で表すことにする。

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{1-1} \\ t_{-11} & t_{-1-1} \end{pmatrix}$$

これを**転送行列**という。この2×2の行列の各要素を書き下してみよ。そして、行列の転置（行と列の入れ替え）を ${}^tT$ と書くと、${}^tT = T$ であることを確認せよ。当然、各要素は実数なので、 転送行列Tは**実対称行列**である。

(2) 一般に $n \times n$ 行列 $M = \left(m_{jk}\right)_{1 \leqq j,k \leqq n}$ に対して、その対角成分の和を行列の**トレース**といい、

$$trM = \sum_{j=1}^{n} m_{jj}$$

と書く。 2×2行列の場合は対角成分は2つだけであるから、トレースはその2つの成分の和である。転送行列スピンの数Nと等しい回数掛けて得られる2×2行列 ${}^tT$ を用いると、分配関数は

$$Z_N(T,H) = trT^N$$

で与えられることを証明せよ。

(3) (1)で確認したように、転送行列Tは実対称行列なので、**実直交行列**を用いて対角化できて、2つの固有値はともに実数である。2×2の実直交行列は一般に、実パラメーターを用いて

$$U = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

と表せる。そして、この行列 U の逆行列 U^{-1}は U の転置で与えられる。

$$U^{-1} = \ {}^tU = \begin{pmatrix} -\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

（実際に、2×2の単位行列をＩと書くことにすれば、${}^tUU = U\ {}^tU = I$ が成り立つことが、すぐに確かめられる。)したがって、この形の行列を用いて

$${}^tUTU = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

と対角化できるはずである。2つの固有値 λ_+, λ_- をTとHの関数として求めよ。ただし、$\lambda_+ > \lambda_-$ とする。

(4) 行列Uのパラメーター ϕ は関係式

$$\cot 2\phi = e^{\frac{2J}{k_BT}} \sinh\left(\frac{\mu_B H}{k_B T}\right)$$

を満たすことを示せ。ただし、 $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ である

(5) $Z_N(T,H) = {\lambda_+}^N + {\lambda_-}^N$ を導け。

(6) このNスピン系のヘルムホルツの自由エネルギーは、 $F_N(T,H) = -k_BT\log Z_N(T,H)$ で与えられる。 図の円周の長さをLとし、スピン数密度 $\rho = \dfrac{N}{L}$ を一定にして、 $L \to \infty$ かつ $N \to \infty$ の極限を考える。この熱力学極限において、ヘルムホルツの自由エネルギー密度

$$f(T,H) = \lim_{L\to\infty} \frac{F_{\rho L}}{L}$$

を求めよ。

VI 磁場$\boldsymbol{B}$と電場$\boldsymbol{E}$が存在する場合、荷電粒子に働くローレンツ力は

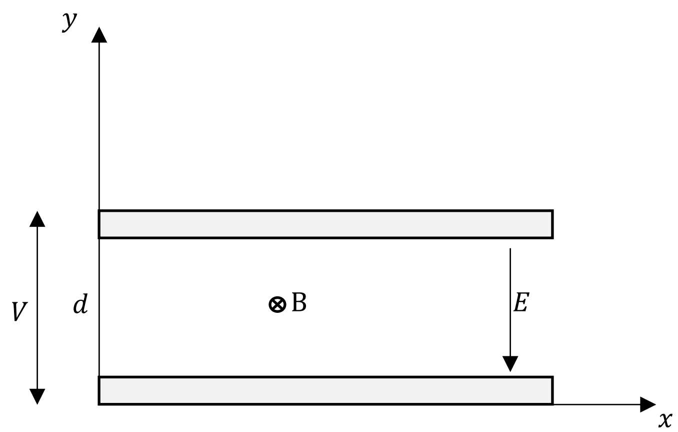
$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} + Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

となる。$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$が一様な定電磁場であるとき、荷電粒子の運動方程式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}' \quad \left(\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{E} \times \dfrac{\boldsymbol{B}}{B^2}\right) \\ m\dot{\boldsymbol{v}}'_{\text{平行}} = Q\boldsymbol{E}_{\text{平行}}, \quad m\dot{\boldsymbol{v}}'_{\perp} = Q(\boldsymbol{v}'_{\perp} \times \boldsymbol{B}) \end{cases}$$

となる。$\boldsymbol{v}'_{\text{平行}}, \boldsymbol{E}_{\text{平行}}$は$\boldsymbol{B}$に平行、$\boldsymbol{v}'_{\perp}$は$\boldsymbol{B}$に垂直な速度成分を表わす。運動は、一定の速度$\boldsymbol{v}_E$での運動と、$\boldsymbol{B}$に平行な方向での加速度$Q\boldsymbol{E}$の等加速度運動、$\boldsymbol{B}$に垂直な方向での等速円運動の合成運動となる。$\boldsymbol{v}_E$の運動を**電場ドリフト**という。

図のように、間隔dの平行平板コンデンサーの両極に電位差V、極版に平行に一様な磁束密度Bの磁場をかけた。陰極から初速度0でとび出した電子は、どのような運動をするか。また、電子が陽極に達しないための条件を求めよ。



Ⅶ 電気伝導率σの媒質では、電磁場によって伝導電流が生じる。媒質の誘電率ε、透磁率μが一様で空間に電荷がないとすれば、

$$rot\boldsymbol{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma\mu\boldsymbol{E} \qquad ①$$

となる。したがって、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$に関する微分方程式は、次式のようになる。

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad ②$$

電束電流が伝導電流に比べて十分小さくなる場合、**準定常電流の近似**がなりたつ。このとき、上式の各右辺の第一項は第二項に対して無視できるから

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} = \sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B} = \sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad ③$$

が得られる。

導体の境界では、電磁場は導体表面から内部へ侵入すると急激に減衰する。 このような効果を**表皮効果**という。電磁場の強度が表面での強度に比べてe^{-1}に減衰する深さは、電磁波の角周波数をωとすると

$$\delta = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right\}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad ④$$

となる。 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ のような**良導体**では、準定常電流の近似がなりたち、このときδは

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \qquad ⑤$$

となる。を**表皮効果の深さ**（**侵入の深さ**）という。

(1) $z \geqq 0$の半無限空間にある導体(電気伝導率σ、透磁率μ)の表面に、平面電磁波が垂直に入射した。電場$\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$、磁束密度$\boldsymbol{B} = (0,\ B_y, 0)$、$E_x, B_y$は$x, y$に依存しないとするとき、導体内での電磁場のふるまいを、準定常電流の近似の範囲内で調べよ。

(2) ②に対する表皮効果の深さを求めよ。

(3) $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$ のときのE_x, B_yを求め、位相関係を調べよ。

Ⅷ

原子核が α 粒子を放出して崩壊する現象は、トンネル効果で理解できる。

α 粒子は、原子核内では、核力によるポテンシャルエネルギーをもち、原子機の外部でクーロン力による斥力を感じる。模型を簡単化して、

r<R のとき、

$$V(r) = -V_0$$

r>R のとき、

$$V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

としよう。ここで、α 粒子の電荷は 2 であり、Z は α 粒子が放出された後の残りの原子核の電荷としよう。この障壁に対するガモフ因子、すなわち、エネルギーE の α 粒子に対するこの障壁を通しての透過確率 T は、

$$T = exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_R^b dr\sqrt{2m\left(\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - E\right)}\right]$$

とおくと、

$$G = -\frac{2}{\hbar}\int_R^b dr\sqrt{2m\left(\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - E\right)}$$

(1) この積分は厳密に求まり、

$$G = \frac{2e}{\hbar}\sqrt{\frac{mZ}{\pi\varepsilon_0}}\sqrt{b}\left[\cos^{-1}\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \left(\frac{R}{b}\right)^2}\right]$$

となることを示せ。ただし、b は $E = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b}$ で与えられる右側の古典的回帰点である。

(2) r=R でのクーロン障壁の高さに比べてエネルギーE が小さい時の G を求めなさい。