1.

この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz$$

であるから

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^H dz \iiint_{-\infty}^{\infty} dp_x\, dp_y\, dp_z\, e^{-\beta\mathcal{H}}$$

$$= \frac{L^2}{h^3}\int_0^H e^{-\beta mgz} dz \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p^2/2m}\, dp\right)^3$$

$$= \frac{L^2}{h^3}\cdot\frac{1-e^{-\beta mgH}}{\beta mg}\cdot\left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\right)^3$$

$$\therefore Z_1 = \left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2}\left(L^2\,\frac{1-e^{-\beta mgH}}{\beta mg}\right)$$

2.

$$Z = \frac{1}{N!}Z_1^N = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3N/2}\left(L^2\,\frac{1-e^{-\beta mgH}}{\beta mg}\right)^N$$

$$\therefore Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3N/2}\left(\frac{L^2}{mg}\right)^N\left(1-e^{-\beta mgH}\right)^N\beta^{-5N/2}$$

3.

$k_B T \gg mgH$ のとき

$$e^{-mgH/k_BT} \simeq 1 - \frac{mgH}{k_BT} \quad (\because \text{マクローリン展開})$$

と近似できるから

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3N/2}\left(L^2 k_B T \frac{\frac{mgH}{k_BT}}{mg}\right)^N$$

$$= \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3N/2}(\underbrace{L^2 H}_{=\text{体積 } V})^N$$

$$= \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3N/2} V^N$$

よって

$$F = -k_B T \log Z$$

$$= -k_B T \log\left\{\frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3N/2} V^N\right\}$$

4.

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = k_B T \frac{\partial}{\partial V}\left(N \log V + \cdots\right)$$

$$= \frac{N k_B T}{V}$$

$$\therefore PV = N k_B T$$

5.

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\log\left\{(1-e^{-\beta m g H})^N \beta^{-5N/2}\right\} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\frac{5}{2}N \log \beta - N \log(1-e^{-\beta m g H})\right\}$$

$$= \frac{5N}{2\beta} - N \frac{mgH\, e^{-\beta m g H}}{1-e^{-\beta m g H}}$$

$$\therefore E = \frac{5N}{2\beta} - N \frac{mgH}{e^{\beta m g H} - 1}$$

6. $k_B T \gg mgH \Rightarrow \beta mgH \ll 1$ より

$e^{\beta m g H} \simeq 1 + \beta m g H$ と近似できるから

$$E = \frac{5N}{2\beta} - N \frac{mgH}{\beta m g H}$$

$$\therefore E = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{3}{2} N k_B$$

7. $k_B T \ll mgH \Rightarrow \beta mgH \gg 1$ より

$e^{\beta mgH} \gg 1$ となるから

$$E = \frac{5N}{2\beta} = \frac{5}{2} N k_B T$$

$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{5}{2} N k_B$$

8.

低温で熱容量が大きいのは、温度が上がったときに気体分子の運動エネルギーが上がるだけでなく、気体の分布が上の方に移動して位置エネルギーも増加するためある。