宿題

位置の期待値 $\langle x\rangle$のときと同様に、運動量空間で電子の運動量がpという値をとる確率は、規格化された波動関数 $\tilde{\psi}(p,t)$によって $\tilde{\psi}^{*}(p,t)p\tilde{\psi}(p,t)$で与えられるから、$p$の期待値は、

$$\langle p\rangle = \int \tilde{\psi}^{*}(p,t)p\tilde{\psi}(p,t)dp \qquad ①$$

のように表される。ここで$\tilde{\psi}(p,t)$は、

$$\tilde{\psi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \psi(x,t)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx \qquad ②$$

と、$\psi(x,t)$のフーリエ（Fourier）変換で結ばれている。 ②を①に代入して、$\langle p\rangle$はやはり

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx$$

で与えられることを証明せよ。

ヒント

① $\psi(x), \psi^{*}(x')$ 別の変数を使う

② $p e^{-\frac{ipx}{\hbar}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$

③ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = \delta(x)$

④ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)$

今週もお疲れ様でした！この辺で一杯いかがですか？？