

ギリシャ文字

Ver.1.02

都築 岳
Gaku Tsuzuki

20 December, 2023

目次

第 1 章	物理的意味	2
第 2 章	特殊関数	4
2.1	$A \cdot \alpha$ (アルファ)	4
2.2	$B \cdot \beta$ (ベータ)	4
2.3	$\Gamma \cdot \gamma$ (ガンマ)	6
2.4	$\Delta \cdot \delta$ (デルタ)	7
2.5	$Z \cdot \zeta$ (ゼータ)	9
2.6	$H \cdot \eta$ (イータ)	10
2.7	$\Theta \cdot \theta$ (シータ)	11
2.8	$\Lambda \cdot \lambda$ (ラムダ)	13
2.9	$\Phi \cdot \phi$ (ファイ)	15
2.10	$\Psi \cdot \psi$ (プサイ)	16
	参考文献	17

第 1 章

物理的意味

ギリシャ文字に対応する物理定数がどれほどあるのか気になったので、調べてみることにした。それに応じてギリシャ文字関数もできる限り列挙する。

小文字	用途	大文字	用途
α	温度係数, 減衰率	A	
β		B	
γ		Γ	電圧反射係数
δ	微小変化	Δ	微小変化
ϵ	誘電率	E	
ζ		Z	
η		H	
θ	角度, 位相	Θ	
ι		I	
κ	磁化率	K	
λ	波長	Λ	

表 1.1: ギリシャ文字に対応する物理的意味 1

小文字	用途	大文字	用途
μ		M	
ν		N	
ξ		Ξ	
o		O	
π	円周率	Π	
ρ	抵抗率, 体積電荷密度	P	
σ	導電率, 表面電荷密度	Σ	
τ	時定数, 時間, トルク	T	
v		Y	
ϕ	磁束, 位相, 角度	Φ	電位
χ		X	
ψ	位相, 角度, 電束	Ψ	
ω	角速度, 角周波数	Ω	立体角

表 1.2: ギリシャ文字に対応する物理的意味 2

第2章

特殊関数

2.1 $A \cdot \alpha$ (アルファ)

-アルファ関数-

アルファ関数とは,

$$\begin{aligned}\alpha_n &\equiv \int_1^{\infty} t^n e^{-zt} dt \\ &= n! z^{-(n+1)} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\end{aligned}$$

と定義される.[7]

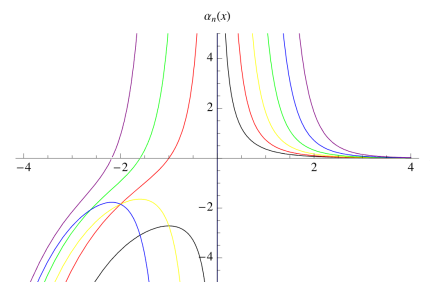


図 2.1: α 関数

2.2 $B \cdot \beta$ (ベータ)

ベータ関数はガンマ関数と密接に関わる複素関数であり, 積分計算への応用でよく用いられる. 次の式のように定義される.

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (Re(p) > 0, Re(q) > 0)$$

$t = \frac{s}{1+s}$ と変数変換することで得られる定義が

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}} ds \quad (Re(p) > 0, Re(q) > 0)$$

上式のようになる.[3]

性質として,

$$B(p, q) = B(q, p)$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q)$$

上記のようになる.

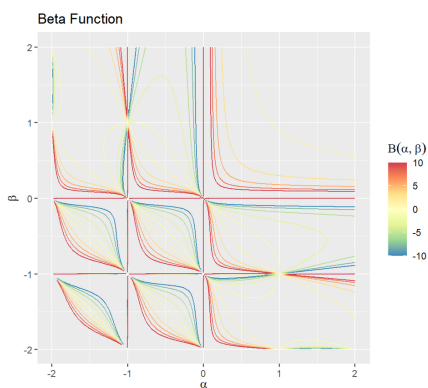


図 2.2: β 関数

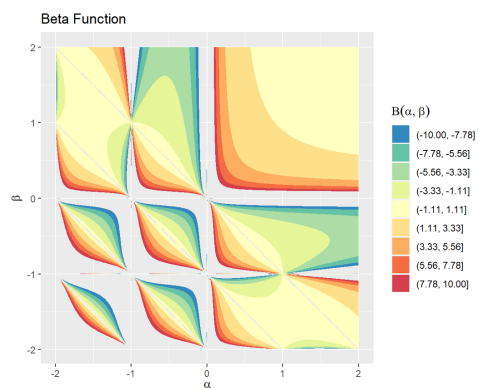


図 2.3: β 関数 2

2.3 $\Gamma \cdot \gamma$ (ガンマ)

-ガンマ関数-

ガンマ関数は数学的にいうと、階乗関数 $n!$ を複素関数に拡張したものである。統計力学でよく用いられるスターリングの公式も、ガンマ関数を用いた計算から導かれる。 $Re(z) > 0$ を満たす複素数 z に対して、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は次の式で定義される.[9]

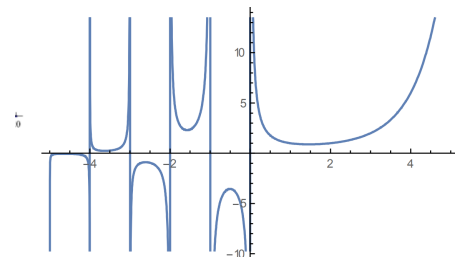


図 2.4: γ 関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$Re(z) > 0$ という限られた範囲でのみ有効である。ここから導かれるガンマ関数の性質を挙げると、

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \quad (Re(z) > 0) \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

などがある。

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は次の式で定義される

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z$$

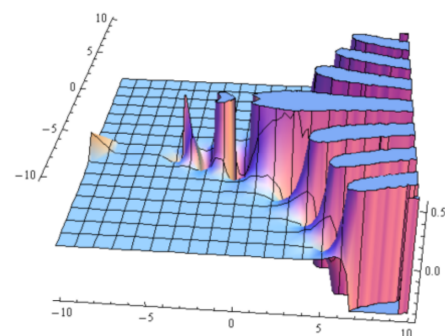


図 2.5: γ 関数の虚数部

2.4 $\Delta \cdot \delta$ (デルタ)

-デルタ関数-

デルタ関数は物理現象を数学的に表すときに欠かせない要素のひとつである。

任意のなめらかな関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

を満たす超関数 $\delta(x)$ をディラックのデルタ関数という。

デルタ関数は積分を通して定義されるという、通常関数とは性質の異なるものであり、「超関数」と呼ばれる。デルタ関数は $x \neq 0$ で 0 の値をとり、 $x = 0$ で発散しており、その発散の度合いが、 $f(x)\delta(x)$ を $x = 0$ をまたいで積分したときに $f(0)$ を与えるような状況を表すのに用いられる。

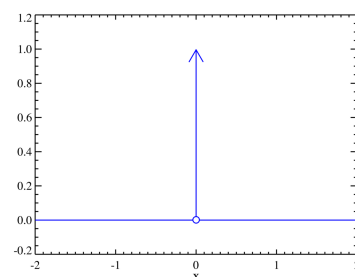


図 2.6: δ 関数

物理的な例を挙げると、無限小の時間に物体に有限の力積を与える P を与える力、撃力 $F(t)$ や、質点・点電荷 Q が存在するときの質量密度分布 $\rho_M(r)$ 、電荷密度分布 $\rho_Q(r)$ で次の例のように用いられる。

1. 撃力

$$F(t) = P\delta(t - t_0)$$

2. 質点・点電荷

$$\rho_M(\mathbf{r}) = M\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$\rho_a(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

また, 基本的性質として

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$$

$$\int_a^b f(x) \delta'(x) dx = -f'(0)$$

以上のような性質が挙げられる.

2.5 $Z \cdot \zeta$ (ゼータ)

リーマンのゼータ関数が挙げられる.

$s > 1$ の実数に対して,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

バーゼル関数の初等的な証明による平方数の逆数和である. 例として, 以下のような等式が成り立つ.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

また, ゼータ関数の両辺に強引に $s = -1$ を代入すると,

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

となり, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$ という奇妙な数式が得られることで有名である. ガンマ関数に負の偶数を代入すると,

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \dots = 0$$

0 になり, これを自明な零点という.

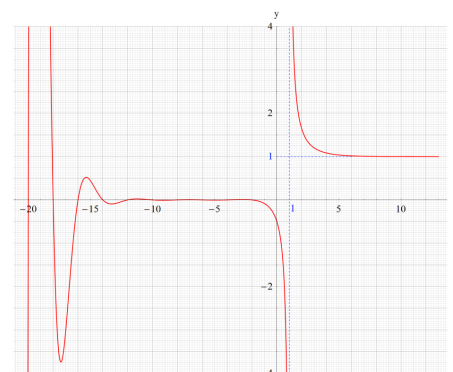


図 2.7: ζ 関数

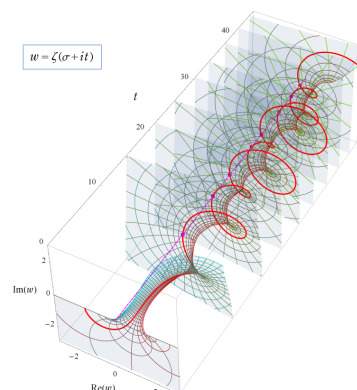
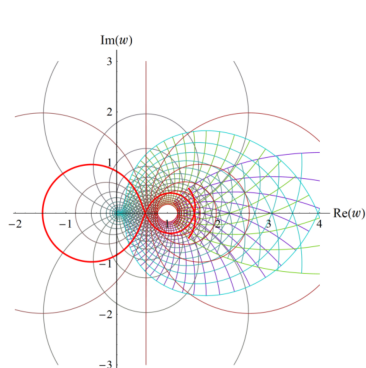


図 2.8: ゼータ関数の等角写像図

2.6 $H \cdot \eta$ (イータ)

デデキントのイータ関数が下式

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \tau m})$$

であり、ディリクレのイータ関数が下式

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\xi(s)$$

のように表される。

実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、 $x > 0$ について次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\cos(y \log s)}{s^x}$$

$$\eta_i(x, y) = - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\sin(y \log s)}{s^x}$$

これらを図示するとした下図のようになる.[8]

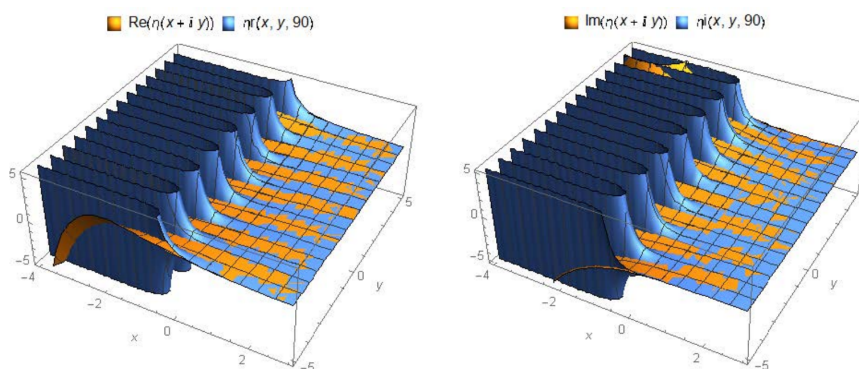


図 2.9: 左図が実数部で右図が虚数部

2.7 $\Theta \cdot \theta$ (シータ)

ヤコビのシータ関数が挙げられる.

$$\theta_1(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-\frac{1}{2}} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz}$$

$$\theta_2(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz}$$

$$\theta_3(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz}$$

$$\theta_4(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz}$$

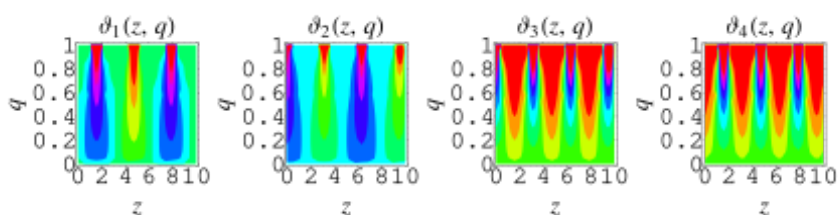


図 2.10: 実数値に限定してプロット

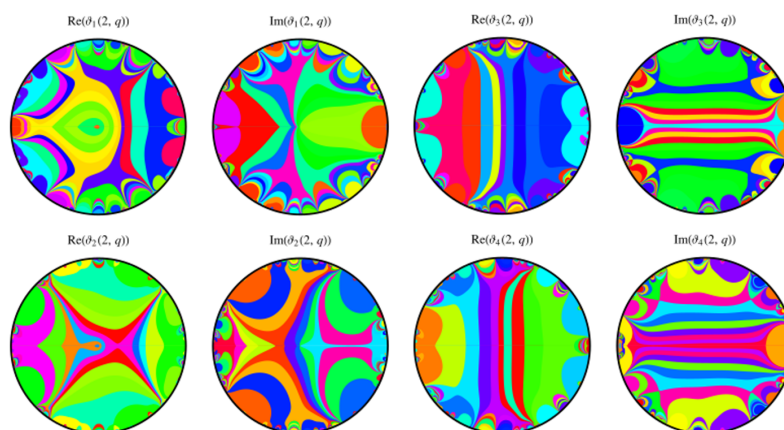


図 2.11: 複素平面上で固定した場合の実数部と虚数部

特別な性質としては,

$$\theta_3(e^{-\pi}) = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$\theta_3(e^{-\pi\sqrt{2}}) = \frac{\Gamma(\frac{9}{8})}{\Gamma(\frac{5}{4})} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{2^{\frac{1}{4}}\pi}}$$

$$\theta_3(e^{-\pi\sqrt{6}}) = \left[-\frac{\Gamma(\frac{1}{24})\Gamma(\frac{5}{24})\Gamma(\frac{7}{24})\Gamma(\frac{11}{24})}{16\sqrt{6}(-18 - 12\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 7\sqrt{6})\pi^3} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\theta_4(e^{-\pi}) = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$\theta_4(e^{-\pi}) = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$\frac{\theta_2(-e^{-\pi\sqrt{3}})}{\theta_3(e^{-\pi\sqrt{3}})} = (4\sqrt{3} - 7)^{\frac{1}{4}}$$

が知られている. $\Gamma(z)$ はガンマ関数で, すべてラマヌジャンシータ関数の特殊ケースである.[1]

O.Maricheu による特別な導関数値は,

$$\theta_4'(e^{-\pi}) = -\frac{e^{\pi}[\pi^2 - 2\Gamma^4(\frac{3}{4})]}{8 - 2^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{3}{4}}\Gamma^5(\frac{3}{4})}$$

と与えられる.

2.8 $\Lambda \cdot \lambda$ (ラムダ)

ディリクレ・ラムダ関数は1の周りで次のようにローラン展開される。

$$\lambda(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ \gamma_r + \frac{\log^{r+1} 2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \frac{(z-1)^{r+n}}{(r+n)!}$$

$\lambda(z)$ をディリクレ・ラムダ関数, $\lambda^{<n>}(z)$ をその直系 n 階原始関数, $H_n (= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})$ を調和数とすると, 全複素数面上で次式が成立する。(高階積分)

$$\begin{aligned} \lambda^{<n>}(z) &= \frac{(z-1)^{n-1}}{2(n-1)!} \log(z-1) - H_{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ \gamma_r + \frac{\log^{r+1} 2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \frac{(z-1)^{r+n}}{(r+n)!} \end{aligned}$$

ただし, γ_r は次式で定義されるスチルチェス定数である.[6]

$$\gamma_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(\log k)^r}{k} - \frac{(\log n)^{r+1}}{r+1} \right\}$$

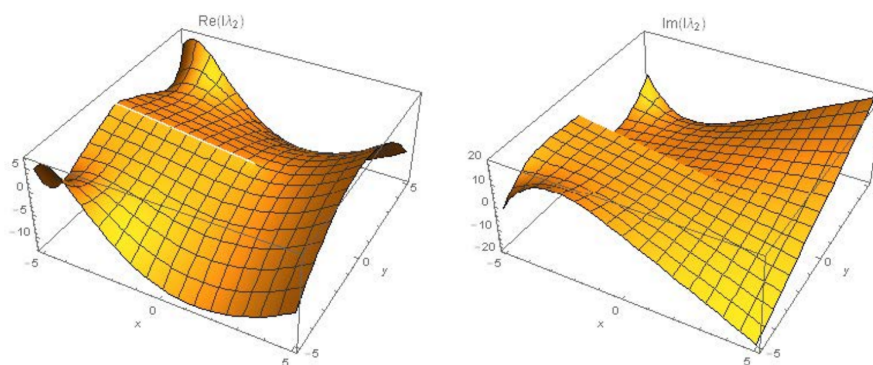


図 2.12: $\lambda^{<2>}(x+iy)$ の実数部と虚数部

p を任意の複素数, $\lambda(z)$ をディリクレラムダ関数, $\lambda^{<n>}(z)$ をその直系 n 階原始関数, $\Gamma(p)$ をガンマ関数, $\psi(p)$ をディ・ガンマ関数, そして γ_r をスチルチェス定数とすると, 全複素数平面上で次式が成立する.(超積分)

$$\lambda^{<p>}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(p) - \gamma_0}{2\Gamma(p)}(z-1)^{p-1} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ \gamma_r + \frac{\log^{r+1} 2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \frac{(z-1)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)}$$

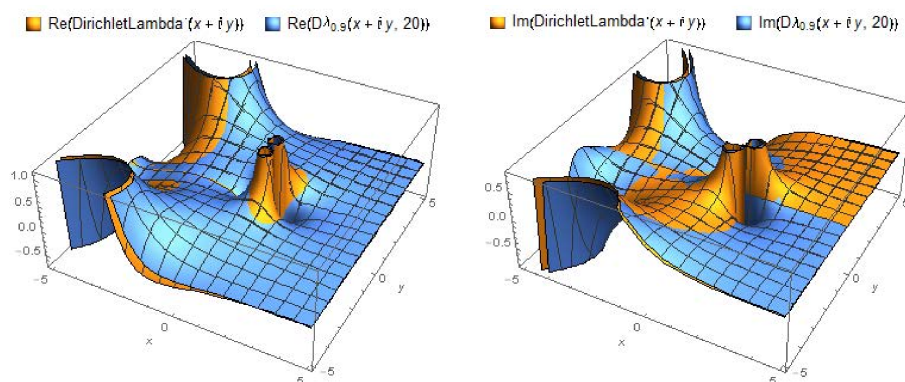


図 2.13: 0.9 階微分

2.9 $\Phi \cdot \phi$ (ファイ)

-オイラーのファイ関数-

自然数 n に対して, 1 から n までの自然数のなかで n と互いに素なもの数を $\phi(n)$ とかき, オイラーの ϕ 関数とよぶ.

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ と素因数分解出来るとき,

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

とかける.

例として, 12 と互いに素な 12 以下の自然数の個数は

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5, \phi(180) = 180 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 48[\text{個}]$$

となる.[4]

性質として,

ファイ関数の和として

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

$n=6$ とすると,

$$\phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(6) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

n を自然数, a と n と互いに素な正の整数としたとき,

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

n が素数のときはフェルマーの小定理となる.

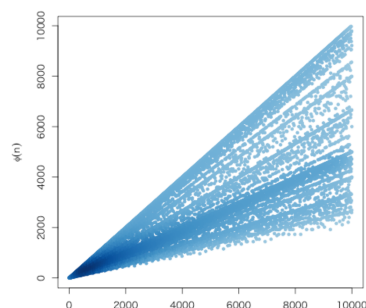


図 2.14: ϕ 関数 [2]

2.10 $\Psi \cdot \psi$ (プサイ)

ディガンマ関数あるいはプサイ関数とはガンマ関数の対数微分で定義される特殊関数.

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

基本的性質として, ガンマ関数のワイエルシュトラスの無限乗積表示

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1) \cdots (z+n)}{n^z n!}$$

を対数微分することで,

$$\psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln n - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{z+k} \right\}$$

という表示を得る. 特に

$$\psi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\gamma \right\}$$

を得る. $\gamma = 0.5772 \cdots$ はオイラー定数である. また次のような積分表示がある

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \int_0^\infty \left(e^{-s} - \frac{1}{(1+s)^z} \right) \frac{ds}{s} \\ \psi(z) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-zs}}{1-e^{-s}} \right) ds \\ \psi(z) &= -\gamma + \int_1^\infty \frac{e^{-zs} - 1}{s^2} ds \end{aligned}$$

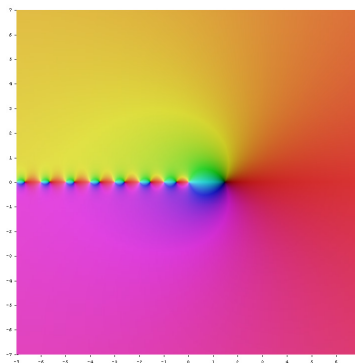


図 2.15: 複素平面上での ψ 関数 [5]

参考文献

- [1] Jacobi theta functions. <https://mathworld.wolfram.com/JacobiThetaFunctions.html>.
- [2] R でオイラーの ϕ 関数の列挙. <https://rion778.hatenablog.com/entry/20121013/1350138040>.
- [3] 【r】 ベータ関数の作図. <https://www.anarchive-beta.com/entry/2022/03/04/031350>.
- [4] オイラーのファイ関数のイメージ. <https://manabitimes.jp/math/667>.
- [5] ガンマ関数とディガンマ関数. <https://sugaku.sakura.ne.jp/ja01.pdf>.
- [6] ゼータ関数等の高階微積分と超微積分. <https://sugaku.sakura.ne.jp/ja26.pdf>.
- [7] α 関数. <https://mathworld.wolfram.com/AlphaFunction.html>.
- [8] 項別高階微分 (逆三角関数、逆双曲線関数). <https://sugaku.sakura.ne.jp/ja11.pdf>.
- [9] 松本睦郎. ベータ関数とガンマ関数を視覚化する. http://izumi-math.jp/M_Matsumoto/91_matsumoto.pdf.