量子力学 出落ち小問集

何か皆んなに還元出来る問題はないかなーと東工の量子ざっと11年分を解いていたのですが、結論から言うと見つかりませんでした。多分、自分が解けている問題はその時点でほぼほぼ皆も解けるだろうし（同じ教材をやっていたから）、そもそも知識量に開きがあるので、意味がないと感じました。
そこで量子力学をやっていて出来ない問題はほぼ出落ちだと気づいたので、今回は自分が出落ちした問題の中からいくつか選出して出題します。
一問でも解けたらその時点で都築より量子力学が上回ってます。出来る問題は即答目指して解いてみてください。
なんとなく1問1問に一言入れました。読んでみてください。

No.1　1次元で運動する自由粒子の波動関数を $\varphi(x,t)=\exp\{i(kx-\omega t)\}$ とする。
$\hat{p}$ が運動量を表す演算子であることを示せ。

$\hat{p}$ を φ に作用させて、出てきた固有値をみればいいだけ

$$\hat{p}\varphi = \hbar k \exp\{i(kx-\omega t)\}$$
$$= \hbar k\, \varphi$$

$\hbar k$ は運動量であるから、$\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ は運動量を示す。

パッと見、「？」となって答えを見てしまいました。解けた方が良いと思います。

No.2　エルミート演算子 $\hat{A}$ の期待値の時間発展が $\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$ を示せ。
（$\hat{A}$ と $\hat{H}$ はエルミート演算子）

期待値も時間発展していることに注意。

$$\langle A\rangle = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$$
$$= \langle\psi(0)|e^{\frac{it\hat{H}}{\hbar}}\hat{A}\,e^{\frac{-it\hat{H}}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$$

↑ここの変形で殆んど勝負あり

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle\psi(0)|\frac{i\hat{H}}{\hbar}e^{+}\hat{A}e^{-} - \frac{i}{\hbar}e^{+}\hat{A}\hat{H}e^{-}|\psi(0)\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(0)|e^{+}[\hat{A},\hat{H}]e^{-}|\psi(0)\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$$

No.3 エルミート演算子について. 固有値が実数であることを示せ.

エルミート演算子を $\hat{a}$, 固有ケットを $|a_j\rangle, |a_i\rangle$, 固有値を a_j, a_i とする.

$$\begin{cases} \hat{a}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \\ \hat{a}|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle \Rightarrow \langle a_j|\hat{a}^\dagger = a_j^* \langle a_j| \end{cases}$$

から $\langle a_j|\hat{a}|a_i\rangle$ をつくる.

$$\begin{cases} \langle a_j|\hat{a}|a_i\rangle = a_i\langle a_j|a_i\rangle \\ \langle a_j|\hat{a}|a_i\rangle = a_j^*\langle a_j|a_i\rangle \end{cases}$$

$$\therefore \ a_i\delta_{ij} = a_j^*\delta_{ij}$$

$i \neq j$ のとき $0=0$

$i = j$ のとき $a_i = a_i^*$ よって固有値は実数 //

3年間に渡って出題されていた。

No.4 エルミート演算子について. 異なる固有値をもつ固有ケットは互いに直交することを示せ.

(固有値が実数であることを用いてよい)

$$\begin{cases} \langle a_j|\hat{a}|a_i\rangle = a_i\langle a_j|a_i\rangle \\ \langle a_j|\hat{a}|a_i\rangle = \langle a_j|\hat{a}^\dagger|a_i\rangle = a_j^*\langle a_j|a_i\rangle = a_j\langle a_j|a_i\rangle \end{cases}$$

$$\therefore \ (a_i - a_j)\langle a_j|a_i\rangle = 0$$

$a_i \neq a_j$ より. $\langle a_j|a_i\rangle = 0$

よって異なる固有値をもつ固有ケットは互いに直交する. //

No.3,4は演習しように もあったような…?

No.5 $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x,t) + \phi_2(x,t)\right)$ と表されるとき.

$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{L}\left(\sin^2\frac{\pi}{L}x + \sin^2\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{1}{L}\left(\sin\frac{\pi}{L}x\right)\left(\sin\frac{2\pi}{L}x\right)\left(2\cos\frac{E}{\hbar}t\right)$ と確率密度分布は表される.

このとき位置の期待値が時間によってどのように変化するか答えよ.

時間変化だけを見ればよいことに注意.

$$\langle x\rangle = \int \Psi^* x \Psi \, dx = \int x |\Psi(x,t)|^2 dx$$

$$= \underbrace{\int x \frac{1}{L}\left(\sin^2\frac{\pi}{L}x + \sin^2\frac{2\pi}{L}x\right) dx}_{K} + \underbrace{\int x \frac{1}{L}\left(\sin\frac{\pi}{L}x\right)\left(\sin\frac{2\pi}{L}x\right)}_{M}\left(2\cos\frac{E}{\hbar}t\right) \underline{dx}$$

とおく.

$$= K + 2\cos\frac{E}{\hbar}t \times M$$

よって $2\cos\frac{E}{\hbar}t$ で振動する. //

記憶しておいたら良い

No.6 どのような物理現象を利用すればプランク定数を求められるか説明せよ.

光電効果を利用する。

金属の表面に紫外線を照射し、表面から飛び出す電子のエネルギーを測定する.

$E_{ele} = qV = eV$

また仕事関数Wを用いてアインシュタインの光電効果の式から

$E = h\nu - W$　　とも表せる.

$\therefore eV = h\nu - W$, $V = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$

よって Vとνに関するグラフを書き、傾きを求め $\frac{1}{e}$ することで求められる。

何割の受験生が正確に答えられたのか疑問

No.7 $\hat{A}$ がエルミート演算子であるとき, $\hat{U}=\exp(i\hat{A})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\hat{A})^n}{n!}$ がユニタリー演算子だと示せ。

$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger}$ を示せばよい

$\hat{U}^{\dagger} = \sum\frac{(-i\hat{A})^n}{n!} = \exp(-i\hat{A}) = \hat{U}^{-1}$. よって $\hat{U}$ はユニタリー演算子 //

恥ずかしながらユニタリー知らなかったんです...

No.8 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2$ で表され、

位置演算子の固有ケットを $|q\rangle$ とするとき、$\langle q|0\rangle$ を求めよ.

$|0\rangle$ に消滅演算子を作用させても 0 ということを利用する.

$\langle q|\hat{a}|0\rangle = 0$

$\langle q|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q} + \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\,i\hat{p}|0\rangle = 0$

$\langle q|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\right)|0\rangle$

$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left\{q\langle q|0\rangle + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial q}\langle q|0\rangle\right\} = 0$

$\frac{\partial\langle 0|q\rangle}{\partial q} = -\frac{m\omega q}{\hbar}\langle q|0\rangle$

$\log\langle q|0\rangle = -\frac{m\omega q^2}{2\hbar} + C$

$\langle q|0\rangle = D e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}$

規格化すると,

$D = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \langle q|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}$ //

$\langle q|0\rangle$を微分方程式として解くんですね...