ラマヌジャン公式集

Ver.1.03

都築 岳
Gaku Tsuzuki

07 December, 2023

0.1 円周率 π に関する公式

π に関する公式 1

$$\pi \fallingdotseq \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}$$

$= \underbrace{\underline{3.141}}_{\text{ここまで正しい}}6\ldots$ となり, 小数第 3 位まで一致する.

π に関する公式 2

$$\frac{3}{\pi} = 1 - 24\left(\frac{1}{e^{2\pi}-1} + \frac{1}{e^{4\pi}-1} + \cdots\right)$$

$= \underbrace{\underline{3.141}}_{\text{ここまで正しい}}3\ldots$ となり, 小数第 3 位まで一致する.

ネイピア数から円周率を計算出来ることが特徴.

π に関する公式 3

$$\pi \fallingdotseq \frac{99^2}{2206\sqrt{2}}$$

$= \underbrace{\underline{3.141592}}_{\text{ここまで正しい}}73\ldots$ となり, 小数第 6 位まで一致する.

π に関する公式 4

$$\pi \fallingdotseq \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

$= \underbrace{\underline{3.14159265}}_{\text{ここまで正しい}}\ldots$ となり, 小数第 8 位まで一致する.

π に関する公式 5

$$\pi \fallingdotseq \frac{63(17+15\sqrt{5})}{25(7+15\sqrt{5})}$$

$= \underbrace{\underline{3.141592653}}_{\text{ここまで正しい}}\ldots$ となり, 小数第 9 位まで一致する.

π に関する公式 6

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}$$

$n=1$ で計算すると,

$\pi \fallingdotseq \underbrace{\underline{3.1415926535897938}}_{\text{ここまで正しい}}\ldots$ となり, 小数第 15 位まで一致する.

-ライプニッツの公式-

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

円周率の値を約 1750 万桁まで計算し, 当時の最高記録であったライプニッツの公式の 1000 万桁を大幅に上回った.[**?**]

π に関する公式 7

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n)!(1123+21460n)}{882^{2n+1}(4^n n!)^4}$$

$n=0$ で計算すると, $\pi \fallingdotseq \underbrace{\underline{3.1415}}_{\text{ここまで正しい}}8504\ldots$ となり, 小数第 4 位まで一致する.

$n=1$ で計算すると, $\pi \fallingdotseq \underbrace{\underline{3.14159265}}_{\text{ここまで正しい}}4\ldots$ となり, 小数第 8 位まで一致する.

π に関する公式 8

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}$$

$n=1$ で計算すると, $\pi \fallingdotseq \underbrace{\underline{3.141}}_{\text{ここまで正しい}}\ldots$ となり, 小数第 3 位まで一致する.

$n=4$ で計算すると, $\pi \fallingdotseq \underbrace{\underline{3.14159265358}}_{\text{ここまで正しい}}0\ldots$ となり, 小数第 11 位まで一致する.

その他にも様々な公式が存在する.

π に関する公式 9

$$\pi^4 = 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16539 + \cdots}}}}$$

連分数を含むのが特徴.

π に関する公式 10

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots = \frac{2}{\pi}$$

π に関する公式 11

$$\sqrt{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1103 + 26390n)(2n-1)!!(4n-1)!!}{99^{4n+2}32^n(n!)^3} = \frac{1}{\pi}$$

π に関する公式 12

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2}\cdots = \frac{9}{2\pi^2}$$
$$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4}\cdots = \frac{15}{2\pi^4}$$

ハーディーに向けた最初の手紙に書かれていた数式. 最初はまったく相手にしていなかったが, 共同研究者のリトルウッドと検討し,' このインド人は天才か狂人のどちらだ' と叫んだことは有名.

π に関する公式 13

$$1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4\cdots = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{4})^2}$$

ガンマ関数を含むのが特徴.

π に関する公式 14

$$\text{If} \quad \alpha\beta = \pi^2$$
$$then \quad \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}\left(1 + 4\alpha\int_0^{\infty}\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{\beta}}\left(1 + 4\beta\int_0^{\infty}\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)$$

π に関する条件をもとに, 同じ積分の形で等式が成り立つ.

[参考]　その他の π に関する式は以下のようなものがある

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

WALLI'S PRODUCT(1665)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

GREGORY'S SERIES(1671)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

MACHIN'S FORMULA(1706)

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)![212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 + n(13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750)]}{(n)!^3(3n)![5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^{(3n+3\sqrt{2})}}$$

BORWEIN AND BORWEIN(1987)

最初の 2 つの数列は, 数学者 john Wallis と james Gregory によって発見されたもので, おそらく最も知られている数列のひとつであるが, 計算上はほとんど役に立たない. 数列の項を足したり掛けたりするようにプログラムされたスーパーコンピューターで 100 年間計算しても, 円周率 100 桁は得られない. ジョン・マシンが発見した公式によって, 円周率の計算が可能になった. 微積分学では, ある数 x の $Arctan$ に対して, x が小さいほどその和が $Arctan$ の値に急速に収束する数列で表すことができるからである. 18 世紀初頭から 1970 年代初頭まで, 円周率の計算は事実上すべて Machin の公式の変形に頼ってきた. ラマヌジャンの数列の和は,$\frac{1}{\pi}$ の値に収束するのがより速い. 数列の n の値が増加する度に, 約 8 桁の正しい桁数が増える. Jonathan M.Borwein と Peter B.Borwein によって定式化された最後の数列は,1 項あたり約 25 桁の桁数を追加する.[**?**]

0.2　ネイピア数 e に関する公式

e に関する公式 1

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cdots}}}}=\frac{1}{e-1}$$

e に関する公式 2

$$\cfrac{\pi}{2+\cfrac{\pi^2}{6+\cfrac{\pi^2}{10+\cfrac{\pi^2}{14+\cdots}}}}=\frac{e^\pi-1}{e^\pi+1}$$

e に関する公式 3

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cdots}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

これらの数式は連分数が特徴.
3 つ目の式は連分数と無限級数の和が超越数 π と e の積の形で導出される.

e に関する公式 4

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{4^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cdots}}}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{\frac{5}{2}}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$$

e に関する公式 5

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{4^{-4\pi}}{1+\cdots}}}=\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2\pi}{5}}$$

この 2 式はラマヌジャンがハーディに向けて最初に書いた手紙に書かれていた式である. ハーディはこの 2 式を見て"レベルが異なり, 明らかに難しく, 私を完全に打ち負かした. 一瞥しただけで, これらは最高クラスの数学者によってのみ書き記されたものであることがわかる."と述べている.[?]

e に関する公式 6

$$\frac{1^{13}}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^{13}}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^{13}}{e^{6\pi}-1}+\cdots=\frac{1}{24}$$

[参考]　ラマヌジャン・マシン

ラマヌジャンの発想を人工的に生み出そうと, イスラエル工科大学の研究グループがラマヌジャン・マシンを発表した. 歴史を通じて, 基本定数の単純な公式は, 単純さ, 美学, 数学的な美しさを象徴してきた. よく知られている例としては, オイラーの恒等式 $e^{i\pi}+1=0$ や黄金比の連続分数表現がある.

$$\pi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

新しい RF を発見する行為は, ガウスが数値データから意味のあるパターンを見出す能力を持って, 有名な素数定理や, 楕円関数やモジュラー関数といった新しい解析分野を生み出したように, しばしば深い直感に起因する. ラマヌジャンマシンでは多項式連続分数 (PCF) を含む方程式でその可能性を実証する. MITM-RF アルゴリズムは, 例えば短い証明を持ついくつかの新しい予想を作り出すことができた [?]

$$\frac{4}{3\pi-8} = 3-\cfrac{1\times 1}{6-\cfrac{2\times 3}{9-\cfrac{3\times 5}{12-\cfrac{4\times 7}{\cdots}}}}$$

$$\frac{2}{\pi+2} = 0-\cfrac{1\times(3-2\times 1)}{3-\cfrac{2\times(3-2\times 2)}{6-\cfrac{3\times(3-2\times 3)}{9-\cfrac{4\times(3-2\times 4)}{\cdots}}}}$$

$$\frac{1}{e-2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{-1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{-1}{1+\cfrac{3}{\cdots}}}}}$$

$$\frac{e}{e-2} = 4-\cfrac{1}{5-\cfrac{2}{6-\cfrac{3}{7-\cfrac{4}{\cdots}}}}$$

これらの RF は, MITM-RF アルゴリズムを適用して生成された, 基本定数の数式に対する自動生成された予想である.[?]

また, MITM-RF アルゴリズムは, 現在のところまだ証明されていない新しい推測も生み出した.

$$\frac{12}{7\zeta(3)} = 1\times 2 - \cfrac{16\times 1^6}{3\times 12 - \cfrac{16\times 2^6}{5\times 32 - \cfrac{16\times 3^6}{7\times 62 - \cfrac{16\times 4^6}{\dots}}}}$$

$$\frac{2}{-1+2G} = 3+0\times 7 - \cfrac{6\times 1^3}{3+1\times 10 - \cfrac{(8\times 2^3)}{3+2\times 13 - \cfrac{10\times 3^3}{\dots}}}$$

$$\frac{8}{\pi^2} = 1 - \cfrac{2\times 1^4 - 1^3}{7 - \cfrac{2\times 2^4 - 2^3}{19 - \cfrac{2\times 3^4 - 3^3}{37 - \cfrac{2\times 4^4 - 4^3}{\dots}}}}$$

これらの結果はこれまで知られていなかった予想である. ζ はリーマンゼータ関数, G はカタラン定数を指す. ラマヌジャン・マシンはすでに 19 個の数式を予測しており, カタラン数に関する数式はこれまでに発見されたものよりも精度が高いことが証明されているが, アペリーの定数 $\zeta(3)$ に関する数式は証明する糸口が見つかっていない. ラマヌジャン・マシンは 2019 年にオープンソースプロジェクトとして稼働した.[?]

0.3 その他の公式

根号が連続する不思議な公式を列挙する.

その他の公式 1

$$\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{8}\sqrt{1-\cdots}}}}}=\frac{1}{2}$$

その他の公式 2

$$\sqrt[3]{-6+\sqrt[3]{-6+\sqrt[3]{-6+\sqrt[3]{-6+\cdots}}}}=-2$$

その他の公式 3

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}=3$$

論文「ベルヌーイ数の諸性質」にて, インド数学教会誌の読者に向けて出した問題の 1 つ. これには半年経っても読者からの解答は得られず, 本人自らから解答を開示した.[?]

その他の公式 4

$$\left(\frac{2^2+1}{2^2-1}\right)\left(\frac{3^2+1}{3^2-1}\right)\left(\frac{5^2+1}{5^2-1}\right)\cdots\ =\frac{5}{2}$$

素数の 2 乗で構成される数式.

その他の公式 5

$$\int_0^\infty \frac{1+(\frac{x}{b+1})^2}{1+(\frac{x}{a})^2}\frac{1+(\frac{x}{b+2})^2}{1+(\frac{x}{a+1})^2}\cdots dx$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+1)\Gamma(b-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b+\frac{1}{2})\Gamma(b-a+1)}$$

ここで有名なタクシー数を紹介する.

その他の公式 6

$$1729=\underbrace{12^3+1^3}_{\text{立方数の和}}=\underbrace{10^3+9^3}_{\text{立方数の和}}$$

1729 は 2 通りの自然数の立方数の和で表される最小の数である. これに近い定理として

-フェルマーの最終定理-

$n \geq 3$ のとき

$x^n+y^n=z^n$ となる自然数の組は存在しない.

がある. ラマヌジャンのタクシー数は

$$\begin{cases} x^3+y^3=z^3+1 \\ x^3+y^3=z^3-1 \end{cases}$$

における, $x=10, y=9, z=12$ に対応している. フェルマーの最終定理に極めて近い形をとっている.

-n 番目のタクシー数-

n 通りの 2 つの立方数の和で表される最小の自然数.

今回ラマヌジャンが示したタクシー数は, 2 通りの 2 つの立方数の和で表される最小の自然数"1729"である.

n にどんな自然数を代入してもタクシー数は必ず存在する.

実際に例を挙げると,

·1 番目のタクシー数

$2=1^3+1^3$

·3 番目のタクシー数

$$\begin{aligned}87539319&=167^3+436^3\\&=228^3+423^3\\&=255^3+414^3\end{aligned}$$

0.4　分割数

-分割数-
例えば"3"は 1+1+1, 1+2, 3 自身のように, 正の整数の和の形を使って 3 通りで表すことができる.
このような場合の数を"分割数"といい,
$p(3) = 3$ と表す.

"4"の場合は, $4 = 1+1+1+1 = 1+2+1 = 2+2 = 1+3$ となり 5 通りで表せる.
これを続けていくと

$p(3) = 3$
$p(4) = 5$
$p(5) = 7$
$p(6) = 11$
$p(7) = 17$

となり, ラマヌジャンはこの規則性について考え,1918 年にハーディーと以下のような漸近的に近づく式を発表した.

分割数に関する式 1

n が十分大きいとき, $p(n)$ の挙動は

$$f(n) = \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

に近づく

この式をきっかけにラマヌジャンの才能が認められ, 後にフェローに任命される.[?]

0.5　特殊関数

特殊関数 1

$$4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}dx$$
$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cdots}}}}}}}$$

特殊関数 2

$$4\int_0^a e^{-x^2}dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{e^{-a^2}}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{2}{2a+\cfrac{3}{a+\cfrac{4}{2a+\cdots}}}}}$$

上記の 2 式は個人的に強く印象に残った. 参考として下式のガウス積分を示す.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

−ガウス積分−

特に 2 式目の形が似ており, 積分区間を変更することで連分数の形で出てくるのは全く想像がつかない.

[参考]　特殊関数について

-デルタ関数-

デルタ関数は物理現象を数学的に表すときに欠かせない要素のひとつである.

任意のなめらかな関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

を満たす超関数 $\delta(x)$ をディラックのデルタ関数という.

デルタ関数は積分を通して定義されるという，通常の関数とは性質の異なるものであり，「超関数」と呼ばれる.　デルタ関数とは $x \neq 0$ で 0 の値をとり，$x = 0$ で発散しており，その発散の度合いが，$f(x)\delta(x)$ を $x = 0$ をまたいで積分したときに $f(0)$ を与えるような状況を表すのに用いられる.　物理的な例を挙げると，無限小の時間に物体に有限の力積を与える P を与える力，撃力 $F(t)$ や，質点・点電荷 Q が存在するときの質量密度分布 $\rho_M(r)$，電荷密度分布 $\rho_Q(r)$ で用いられる.

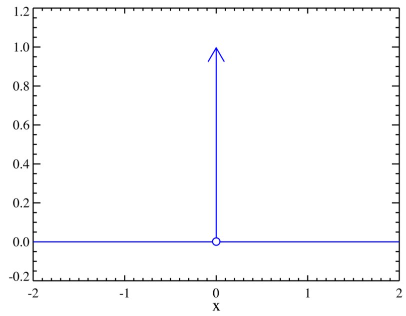


図 1　δ 関数

基本的性質

$$\delta(-x) = \delta(x)$$
$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$
$$\int_a^b f(x)\delta'(x)dx = -f'(0)$$

以上のような性質が挙げられる.

-ガンマ関数-

ガンマ関数は数学的にいうと、階乗関数 $n!$ を複素関数に拡張したものである. 統計力学でよく用いられるスターリングの公式も、ガンマ関数を用いた計算から導かれる.

$Re(z) > 0$ を満たす複素数 z に対して、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は次の式で定義される

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

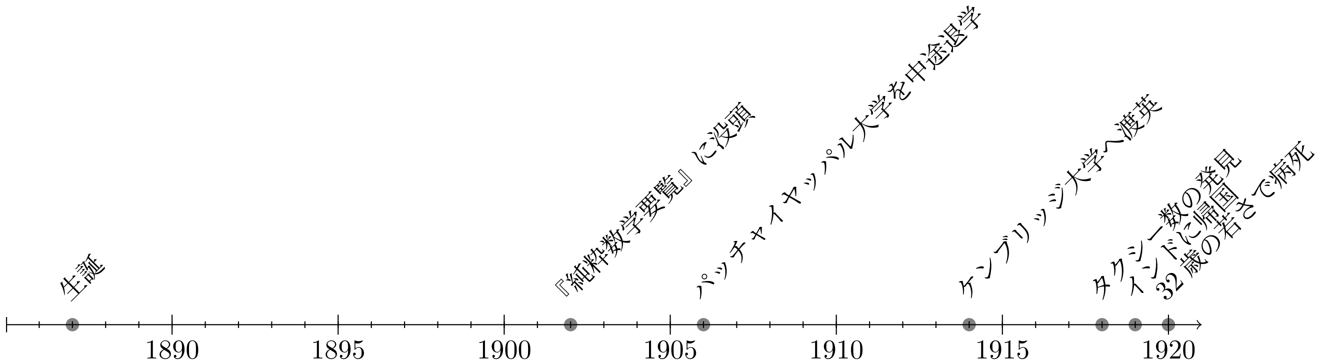
$Re(z) > 0$ という限られた範囲でのみ有効である. ここから導かれるガンマ関数の性質を挙げると,

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\ (Re(z) > 0)$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!\ (n \ni \mathbb{N})$$

などがある.
ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は次の式で定義される

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z$$

0.6　人物年表



1887 年, 南インドのタミル・ナードゥ州タンジャーヴール県クンバコナムの極貧のバラモン階級の家庭に生まれた. 幼少の頃より母親から徹底したヒンドゥー教の宗教教育を受ける. 高校では全科目で成績が悪く, 高等数学の正式な教育は受けていなかった. しかし 15 歳のとき, ジョージ・カーという数学教師が著した『純粋数学要覧』という受験用の数学公式集に出会ったことで数学に没頭する.
奨学金を得てマドラスのパッチャイヤッパル大学に入学したが, 学位を得ないまま中途退学する. しばらく独学で数学の研究を続けていたが, やがて港湾事務所の事務員の職に就き, 仕事を早めに終えて数学の研究に没頭していた.1913 年にケンブリッジ大学のゴドフリー・ハーディは, ラマヌジャンの手紙を読み, やがてその内容に驚愕するようになる.[?]
こうしてハーディは, ラマヌジャンの研究が並外れたものであることを認め, 彼をケンブリッジ大学に招聘した. ラマヌジャンは 1914 年に渡英する. 王立協会フェローに選出されるが, イギリスでの生活に馴染むことができず, やがて身体的な衰弱を来たして病気を患い, 1919 年にインドへ帰国.1920 年に 32 歳の若さで病死した.
ラマヌジャンはその短い生涯の間に, 独自に 3,900 近くの結果をまとめあげた. ラマヌジャン素数, ラマヌジャン θ 関数, 分割式など, 彼の独創的で非常に型破りな結果は, 膨大な量の研究を促すことになった. 彼の何千もの結果のうち, 1, 2 ダース分を除いて, すべてが正しいことが現在証明されている.[?]
渡英後に発表した論文の他には, 渡英前の数学的発見を記したノートが 3 冊, 帰国後に記された「失われたノートブック」が残っている. 彼のノートには, 発表された結果や未発表の結果がまとめられており, 死後数十年にわたって分析・研究されてきた. 特に「失われたノートブック」には, 晩年の発見が記されており, 数学者たちの間で大きな話題となった.
多くの数学者の協力により, 彼が 26 歳までに発見した定理に関して証明が行われた. その作業が完了したのは 1997 年であり, 「ノートブック」と「失われたノートブック」の全文が出版完了したのは 2018 年である.

参考文献

[1] Davide Castelvecchi. Ai maths whiz creates tough new problems for humans to solve. *Nature*, Vol. 590, p. 196, 2021.

[2] Yahel Manor George Pisha Yoav Harris Uri Mendlovic Doron Haviv Yaron Hadad Ido Kaminer Gal Raayoni, Shahar Gottlieb. Generating conjectures on fundamental constants with the ramanujan machine. *Nature*, Vol. 590, pp. 67–73, 2021.

[3] G. H. Hardy. The indian mathematician ramanujan. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 44, No. 3, pp. 137–155, 1937.

[4] Peter B. Borwein Jonathan M. Borwein. Ramanujan and pi. *Scientific American*, Vol. 258, No. 2, pp. 112–117, 1988.

[5] 黒川重信. ラマヌジャン探検—天才数学者の奇蹟をめぐる—. 岩波科学ライブラリー, 2017.