# 超流動

Ver.1.00

都築 岳
Gaku Tsuzuki

20 December, 2023

# 目次

# 第 1 章

# 超流動の歴史

## 1.1 History of cryogenic technology

1. 1823 Farady による $Cl_2$ の液化反応の発見
2. 1908 Kamerlingh Onnes による He の液化反応の発見
   · 液体 He の固相の探索をしたが, 見つからず
   ·2.2K での比熱の異変
   ·2.2K での粘度の抑制
   → 超流動の発見

## 1.2 Liquid He

量子液体であることが特徴. He 以外の原子は冷却すると必然的に固化するが, He のみ $T \to 0$ でも液体を維持する.

· 小さい原子間引力
· 小さい質量
→ 大きな量子力学的な零点振動

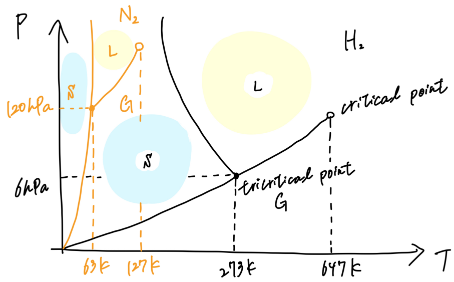



図 1.1: 水素と窒素の相図

# 第 2 章

# 基本的性質

## 2.1 $^3$He と $^4$He の融解曲線

$^4$He と $^3$He の融解曲線を下に示す.

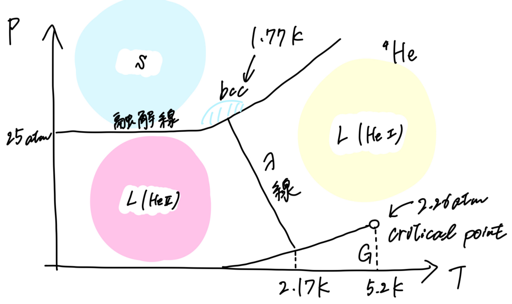



図 2.1: Phase diagram of $^4$He

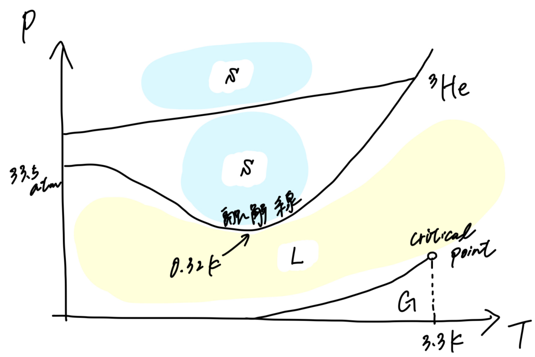



図 2.2: Phase diagram of $^3$He

$^4$He においては, 超流動層が HeII であり, 常流動層が HeI である. $^3$He と $^4$ の共通の特徴としては主に以下のようなものが挙げられる.

1. $T_c$(臨界温度) はとても低い→ 液化は難しい
2. 3 重点は存在しない. 常圧下では $T \to 0$ でも固化せず
3. 融解線は $^4$He では水平, ローカルをとる.$^3$He では低い温度 $(0.32K)$ で最小値をとる

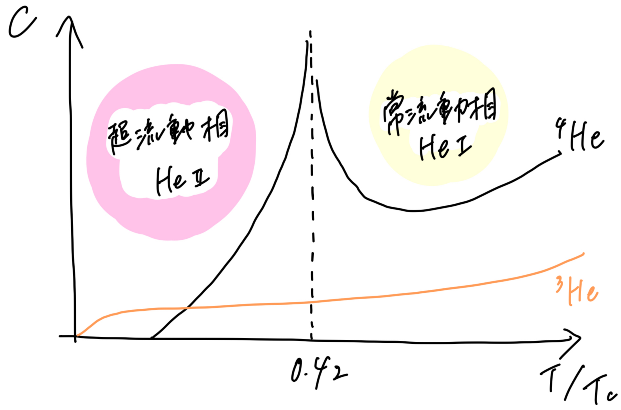



図 2.3: Difference in specific heat C of HeI と HeⅡ

$T_\lambda = \underline{2.17\text{K}}$

$^4$He には, 超流動層の HeⅡ と常流動層の HeI が存在するが, $^3$He には存在しない.

## 2.2　量子液体

引力的な原子間力→ 液化 →Lennard-Jones potencial がよく用いられる.

$$V(r) = 4\epsilon \left\{ \underbrace{\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}}_{\text{電子間のパウリの排他律}} - \underbrace{\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}}_{\text{分極(ファンデルワールス力)}} \right\}$$

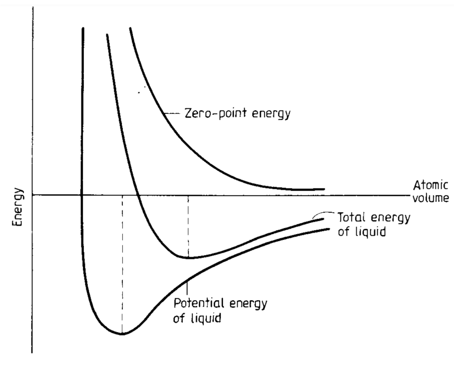



図 2.4: Lennard-Jones potencial

この極小値付近が結晶・格子点まわりの微小振動であり, He の場合は $|\epsilon|$ が小さいため, 零点振動が小さい

零点振動 $\cdots$ 原子が極限までエネルギーを失ったとしても, 不確定性原理より静止せず振動すること → これの影響で He は $T = 0K$ でも固化しない.

液体 He 中を動く He 原子間の平均距離は $\underline{r_m - \sigma \equiv a}$ であり,
不確定性関係より

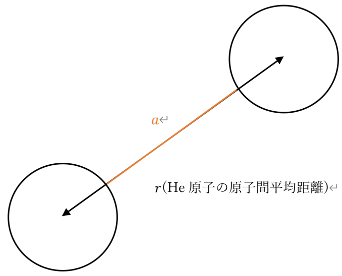



図 2.5

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{a}$$

となる.
ここから零点エネルギーを見積もると,

$$E_{zp} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{a})^2 = \underline{\frac{\hbar^2}{2ma^2}}$$
$$\longrightarrow E_{zp} \simeq 16K > \epsilon(= 10K)$$

量子効果の大きさを表す指標である無次元パラメーター, $\underline{a = \sigma}$ として

$$\Lambda* = \underline{\sqrt{\frac{Ep}{\epsilon}}} = \underline{\frac{\hbar^2}{2ma^2} \times \frac{1}{\epsilon}} \simeq \underline{\frac{\hbar}{\sigma\sqrt{m\epsilon}}}$$

| | $\Lambda*$ |
|---|---|
| $^3$He | 3.1 |
| $^4$He | 2.6 |
| Ne | 0.6 |
| | ⋮ |
| Xe | 0.06 |

表 2.1

## 2.3 Quantum mechanics

1. Uncertainty principle
2. Quantization (discreteness)
3. Quantum statistics: Bosons, Fermions

$^4$He は $T_\lambda = 2.17K$ で BEC を起こし, 超流動状態となる.

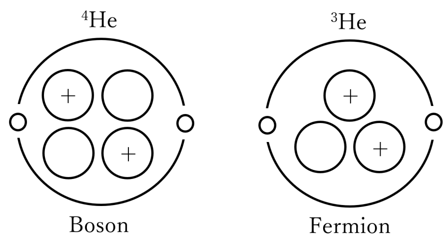



図 2.6

量子統計の違い (ボソンかフェルミオンか) が, $^4$He と $^4$He の
巨視的な性質の違いを生み出している. 3He は $T_\lambda = 2.17K$ で BEC を起こし, 超流動状態となる. では, 何故 $^4$He の融解線は $T \to 0$ で水平になるのか.
Equation of Clausius-Clapeyrons を用いる.

$$\left(\frac{dP}{dT}\right) = \underline{\frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{S_L - S_S}{V_L - V_S}}$$

通常,

$$S_L - S_S > 0$$
$$V_L - V_S > 0$$

また,

$$\left(\frac{dP}{dT}\right) > 0$$

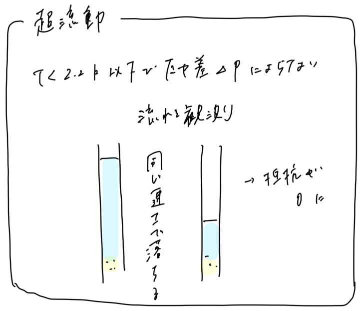
$^4$He において,$\Delta S 0$ $(lowT) \to$ 水平であるとき, <u>液体状態でも固体のような秩序ある状態となる</u>.
The third law of thermodynamics $S = k \log W$ より, 完全結晶のエントロピーは絶対零度 ではすべて等しい.

$$S \to 0 \; as \; T \to 0$$
$$\to S_{L^4He} \approx \underline{0} \; at \; T = 0$$
$$\to \underline{Bose \; Einstein \; Condensation}$$

## 2.4 Basic properties of $^4$He

1. 1938 年にTwo-fluid model(Superfluidity vs normalfluidity)
2. Problems on vortices in superfluid
   $\rightleftarrows$ stability of the superfluid phase.
3. Measurement of viscosity(粘度)
   viscosity $\eta$ = 原子間相互作用による原子の運動量の緩和

超電導を分かりやすくすると,




1. 電子の流れ: 電位差=電流 × 抵抗
2. 液体の流れ: 圧力差=流速 × 抵抗

$T < 2.2K$ 以下で圧力差によらず, 同じ流速.

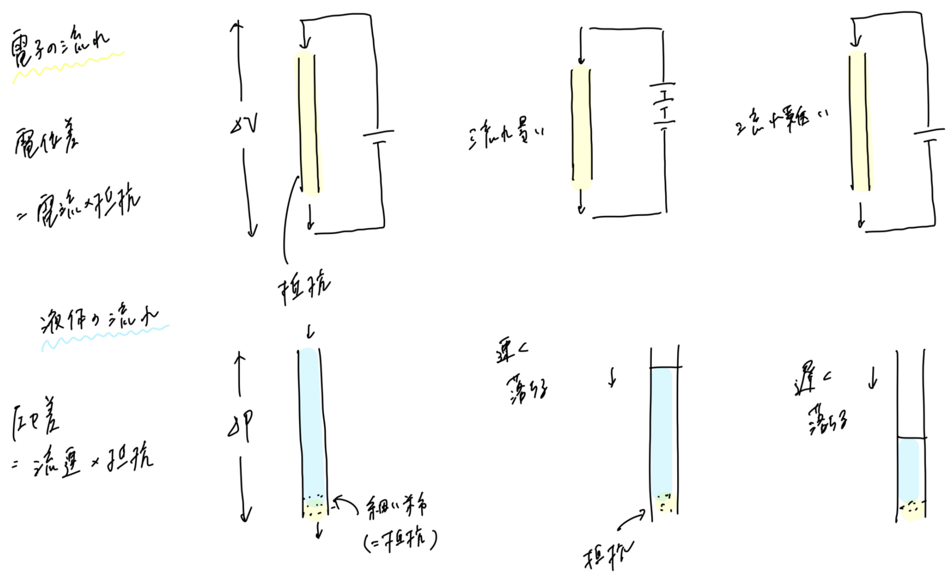



図 2.7: 電子と液体で比較した超流動

# 第 3 章

# 超流動と粘性

超流動 (super fluid)$\cdots$ 回転粘性系の実験で $\eta > 0 (T < T_\lambda)$ となるのは, 速い速度で回転させることによって超流体内に渦 (vortex) が生じ, vortex のからみあった乱流状態が実現し, 新たな粘性を生み出した.
2 種の粘性実験から超流動の粘性の特徴がわかる.

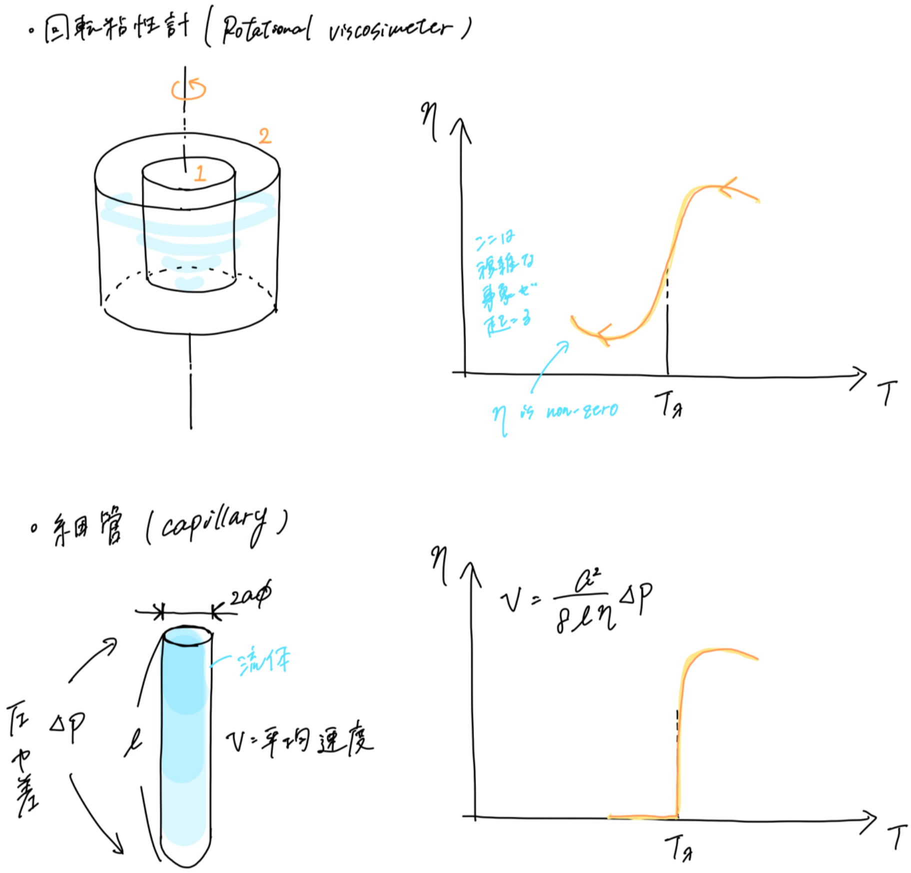



図 3.1: 回転粘性計と細管

$T < T_\lambda$ のとき,

| | 密度 | 速度場 |
|---|---|---|
| 超流体 | $\rho_s$ | $\boldsymbol{v}_s$ |
| 常流体 | $\rho_n$ | $\boldsymbol{v}_n$ |
| 全体 | | $\rho = \rho_s + \rho_n$ |
| 運動量密度 | | $\boldsymbol{j} = \rho_s \boldsymbol{v}_s + \rho_n \boldsymbol{v}_n$ |

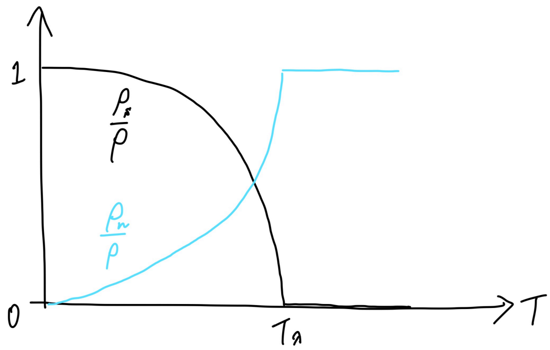



図 3.2: 超流動体と常流動体の密度比

## 3.1　超流体の満たす方程式

特徴として,

- 理想気体のように<u>粘性がない</u>
- <u>エントロピーを伴わない</u>

が挙げられる.

超流体の単位体積あたりの熱力学的エネルギーは,

$$\begin{aligned} dE &= \underline{TdS} + \underline{d\left(\frac{\rho \boldsymbol{v}_s^2}{2}\right)} + \underline{\mu d\rho} \\ &= TdS + \left(\mu + \frac{\boldsymbol{v}_s^2}{2}\right) d\rho + \rho \boldsymbol{v}_s \cdot d\boldsymbol{v}_s \end{aligned}$$

上式は任意の $\boldsymbol{r}, t$ において成立すると仮定すると,

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \left(\mu + \frac{\boldsymbol{v}_s^2}{2}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t}$$

一方, $\rho, E$ は保存量より

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \underline{-\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}_s)} \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} = \underline{-\nabla\cdot\left[(\mu + \dfrac{\boldsymbol{v}_s^2}{2})\rho\boldsymbol{v}_s\right]} \end{cases}$$

以上 3 式から,

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot\left[(\mu+\frac{\boldsymbol{v}_s^2}{2})\rho\boldsymbol{v}_s\right] &= \underline{(\mu+\frac{\boldsymbol{v}_s^2}{2})\left\{-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}_s)\right\} + \rho\boldsymbol{v}_s\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t}} \\ \rho\boldsymbol{v}_s\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} &= \underline{-\left[\nabla(\mu+\frac{\boldsymbol{v}_s^2}{2})\right]\rho\boldsymbol{v}_s} \\ \therefore \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} &= -\nabla(\mu+\frac{\boldsymbol{v}_s^2}{2}) \end{aligned}$$

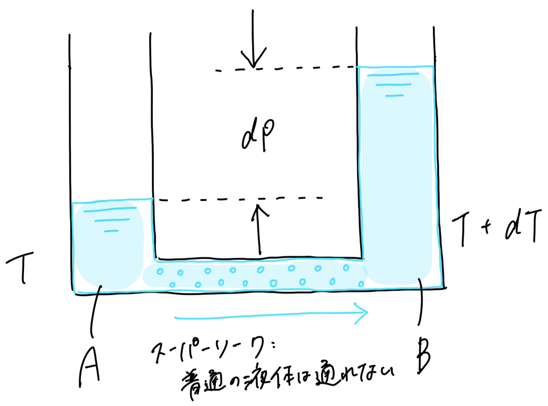
よって, 超流体の運動は化学ポテンシャルの勾配によってもたらされる.

## 3.2　噴水効果 (fountain effect)

$^4$He の厚さ $d(h) = F(\underbrace{gh}_{\text{重力ポテンシャル}}, \underline{\underbrace{\phi}_{vdw\ potencial}}, \underbrace{P}_{\text{圧力}})$

Imposing $dT > 0$ $at$ $B$

→ 温度差 →A-B 間に化学ポテンシャル差が生じる.




$$d\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P dT$$

結果だけ先に用いると,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T = \underline{\dfrac{V}{N} = v = \dfrac{1}{\rho}} \\ \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P = \underline{\dfrac{-S}{N} = -s} \end{cases}$$

この化学ポテンシャル差 $d\mu$ より, 超流動は A から B へ加速される.

$$\therefore d\mu = \frac{1}{\rho}dP - sdT$$

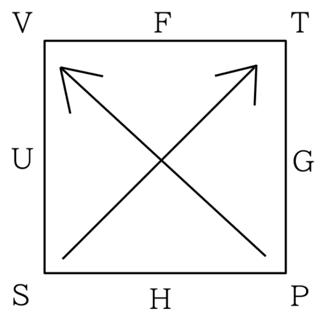
超流動が移動して圧力差が生じると,

$$\begin{aligned}\Delta P &= \underline{\rho s \Delta T}\\ \rightarrow \mu &= \underline{\frac{1}{\rho}(\rho s\Delta T) - s\Delta T} = \underline{0}\end{aligned}$$

流れが止まる平衡状態となる.

先ほど利用した化学ポテンシャルを導出する.
ギブスの自由エネルギーは,

$$\begin{aligned}dG &= d\sum_{\alpha=1}^{V} N_\alpha \mu_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots V)\\ &= \sum \mu_\alpha dN_\alpha + \sum N_\alpha d\mu_\alpha\end{aligned}$$




一方,

$$\begin{aligned}dG &= -SdT + VdP + \sum \mu_\alpha dN_\alpha\\ \therefore -SdT + VdP &- \sum N_\alpha d\mu_\alpha = 0\end{aligned}$$

T, P が定数のとき,

$$\sum N_\alpha d\mu_\alpha = 0$$

気相'-液相"の熱平衡
$\rightarrow \mu'(T, P) = \underline{\mu^{"}(T, P)}$

$$\begin{cases} \mu'(T, P) = \underline{\mu^{"}(T, P)}\\ \mu'(T + dT, P + dP) = \underline{\mu^{"}(T + dT, P + dP)}\end{cases}$$

$$\therefore d\mu' = d\mu^{"}$$

$$\underline{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial T}\right)_P} dT + \underline{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial P}\right)_T} dP = \underline{\left(\frac{\partial \mu^{"}}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \mu^{"}}{\partial P}\right)_T dP}$$

$dP = 0$(等圧) のとき, ギブスの自由エネルギーから

$$
\begin{aligned}
-SdT - Nd\mu &= 0 \\
\to \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P &= -\frac{S}{N} \equiv -s
\end{aligned}
$$

$dT = 0$(等温) のとき,

$$
\begin{aligned}
VdP - Nd\mu &= 0 \\
\to \left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T &= \frac{V}{N} \equiv v
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
-s'dT + v'dP = -s^{"}dT + v^{"}dP
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore -s' + v'\frac{\partial P}{\partial T} &= -s^{"} + v^{"}\frac{\partial P}{\partial T} \\
(v' - v^{"})\frac{\partial P}{\partial T} &= -s^{"} + s' \\
\frac{\partial P}{\partial T} &= \frac{s' - s^{"}}{\underline{v' - v^{"}}} \\
&= \frac{l}{T(v' - v^{"})} \\
l = (s' - s^{"})T & \qquad Clapeyron - Clasius \text{ の式}
\end{aligned}
$$

これが 1 分子当たりの蒸発熱を示す

# 第 4 章

# Bose-Einstein 凝縮 (BEC)

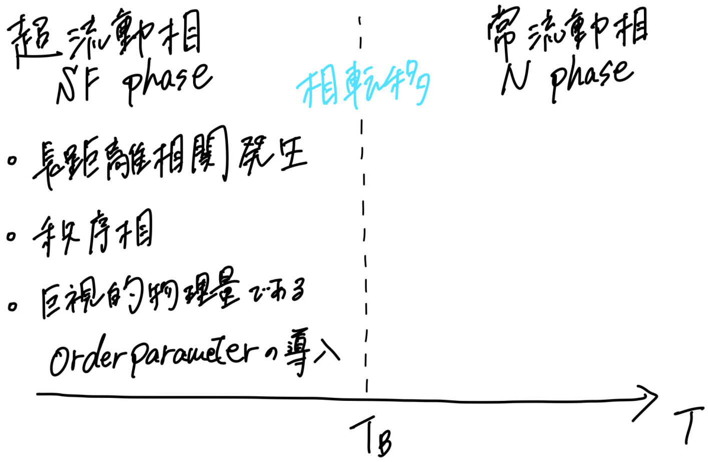



図 4.1: 相互作用のない理想 Bose 系

体積 V の中に N 個の Bose 粒子があったとき, ひとつのエネルギー準位を任意の個数の粒子が占めることが出来る.