高１数学　前期

数学演習 H1　　2 次関数

都築 岳　編著

18-19 シーズンにバロンドールを受賞した
ルカ・モドリッチ(Luka Modrić)。
レアルマドリードの歴史に残る No.10 である。

都築出版

目次

数学演習(2 次関数①)　　読了時間 40min

氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

1 章　$f(a)$の計算

2 つの変数x, y等があった際、xの値が定まると、それに応じてyの値も**ただ 1 つに**定まる時、yをxの関数という。
これを$\boldsymbol{y = f(x)}$と表す。

ここで例題演習をしたい。

$f(a)$の値を求めるという事は、xの値を$f(x) = y$に代入することである。

1-1. $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$の時、次の値を求めよ。

$$f(3),\quad f(-2 + \sqrt{3})$$

$f(-2 + \sqrt{3})$の様に、代入する値が多項式になっている場合には、1 つのものとして考えて代入する。

また、座標軸で分けられた 4 つの部分を図の様に第 1～4 象限と呼ぶ。
これは反時計回りに数字が進むと覚えてしまうだけなので、忘れてしまわないで欲しい。

1-2. 次の点は第何象限の点か。

$$(2, 3),\quad (-1, 4)$$

これについても、座標平面上でどの象限に当てはまるか想像するだけの作業である。もし、まだ考えにくいのであれば簡単に図示し、当て嵌めてみよう。

1 章解答

A-1-1.　今回の問題では、代入すべき関数は 1 元 2 次方程式であり、代入すべき値も実数なので特に気にすることはなく、代入して欲しい。もしこの程度の計算でミスするのならば、問題演習不足であるので、もっと勉強するほかない。

$$\begin{aligned} f(3) &= -2 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1 \\ &= -18 + 9 + 1 \\ &= \boldsymbol{8} \end{aligned}$$

Word で数式を打つ作業は実際に数式を書く何倍も時間がかかるので、ここから先は略解で許されたい(笑)。

$$f\left(-2 + \sqrt{3}\right) = \boldsymbol{-19 + 11\sqrt{3}}$$

となる。ここで自分がミスしてたら恥ずかしい…

代入して展開し、同類項をまとめて答えることに注意。

A-1-2.　この問題は如何に座標を図形として捉えられているか見られている。上の図に合わせて考えてみよう。

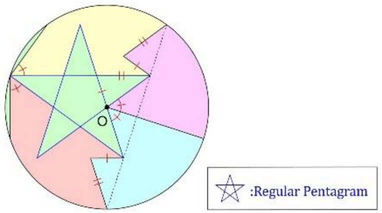
$(2,3)$はx,yが共に正であるので、**第1象限**。

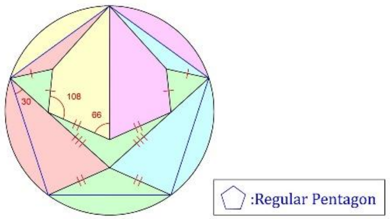
$(-1,4)$はxが負で、yが正であるので**第2象限**である。

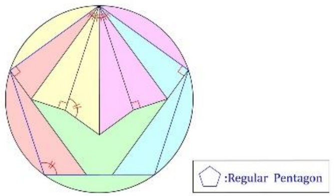
もしかすると、ここまでの内容は読み飛ばすレベルの内容だったかもしれない。但し、打ち込んでいる自分が疲れたので休憩とする。

〜break time〜

ここでポテト一郎さんの面積5等分作品集を拝観しましょう！







※Twitter:@potetoichiro より引用

どれも美しいですね！！

目が清められたところで2章に進みましょう！

2章　1次関数の最大･最小

これから学びたい内容は2次関数(曲線)についてなのだが、まずは1次関数(直線)での問題に慣れてからになる。

ここでは1次関数の最大･最小を扱う。これから定義域(xの変域)を見て、値域(yの変域)を答える問題を解く。

数式のままでは分かりにくいことがあるので、グラフに適宜図示しながら進んで欲しい。

2-1. 次の関数の値域を求めよ。また、最大値･最小値があればそれも求めよ。

(1)　$y=-3x+2\ \ (-4\leq x\leq 3)$

(2)　$y=2x+1\ \ (x\leq 3)$

値域は関数が連続であるのならば、xの変域、即ち定義域をyに代入すれば良い。しかしこれには例外が多く存在する。

まず(2)の様にxの定義域に下限がない場合は、当然値域も存在しない。今回の関数であるならば、イメージとして$-\infty$へ飛んで行ってしまう感覚である。

また、2次関数の場合にも軸を考えなければならない。しかしこれについては後述する。

次の問題は値域の条件から、1 次関数の係数を求める問題である。、この系統の問題ではa、即ち傾きが不明であることが多い。
そうなると傾きの符号によって、値域の意味合いが変わってきてしまうので、**場合分けが必要**になる。

2-2. 関数 $y = ax + b$ $(1 \leq x \leq 2)$の値域が $3 \leq y \leq 5$であるとき、定数a, bを求めよ。

この問題、もうお気づきだろうか。
aの値によって、定義域の取り方が変わってしまうのである。
もしも、$a > 0$ならば$x = 2$ の時が最大値をとるし、$a < 0$ならば$x = 1$の時に最大値を取るのである。
ここで勘が良い人は、$a = 0$の時どうなるか気になると思う。
それについては$a = 0$ より$y = b$となり、定数の関数になることから、横一直線のグラフになってしまう。
よって、値域を取れない為、不適なのである。
このように場合分けをしながら解き進めてほしい。

2 章解答

A-2-1. 答えを書くのが非常に面倒くさい。
都築が疲れてしまったので、問題の解き進め方は書いておくので、分からない点があれば授業中に聞いてほしい。

今日は vs Celta de Vigo のマドリーの試合が朝 5 時からあるとの事だったので、深夜テンションで始めたがそろそろ気持ちに体が追い付かなくなってきた。

何で小テストから演習問題作ろうなんて思ったんだろう…

(略解)(1)	値域は$-7 \leq y \leq 14$
	$x = -1$ で最大値 14
	$x = 2$ で最小値 -7

この問題は解けた人も多かったのではないだろうか。
値域が純粋に最大値・最小値となり、解き易かった様に思う。
問題の下につらつらと特大ヒントを置きすぎているせいで、どれ程初見で解けるのかが分かりにくくなってしまっている点は反省だ。

(略解)(2)	値域は$y \leq 7$
	$x = 3$ で最大値 7
	最小値は取らない

この問題も値域が最大・最小値だった(笑)。
まあでも、不適な解が存在することは分かってもらえたんじゃないかと思う。

A-2-2.　さて、問題の場合分けだ。

まず、定義域に合わせて値域を文字で表しておこう。

$$x = 1 \text{ の時}\quad y = a + b$$

$$x = 2 \text{ の時}\quad y = 2a + b$$

<u>$a > 0$の時</u>

$a + b$が最小値となり、$2a + b$が最大値となる。

よって　$a + b = 3$

$2a + b = 5$

となり、これを解くと$\boldsymbol{a = 2,\ b = 1}$となる。

前にも述べたが、マドリーの試合が始まる事と、疲労から略解とさせてもらう。

$a = 0$の時

定数関数となるので、不適

$a < 0$の時

$a = 2, b = 7$

$\therefore \boldsymbol{a = 2, b = 1}$**または**$\boldsymbol{a = -2, b = 7}$

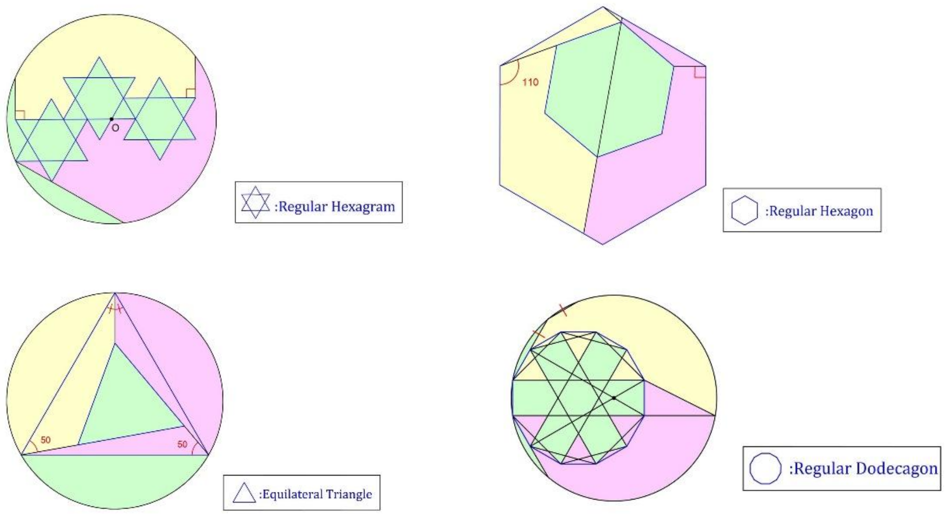
となる。

いやはや、たった4問ながらとても長くなってしまった。

ここで私が疲れたので、休憩としよう。

～break time～

ここでポテト一郎さんの面積3等分作品集を拝観します！



とてもお美しいですね！！

3章　絶対値のついた1次関数

絶対値と聞くと、カッコ内にある数字は正となるイメージがあるかもしれない。そのイメージのまま関数にアウトプットして欲しい。

3-1. 次の関数のグラフを書きなさい

$$y = |2x + 5|$$

この問題でまず手慣らししてもらいたい。この絶対値カッコ内は$2x + 5$となっているので、$2x + 5 = 0$ よって$x = -{}^{5}/_{2}$よりも小さくなった時に、数式全体に$\times -1$され正の値となる事が分かる。$x = {}^{5}/_{2}$を境に関数が変わることが分かるのではないか。

さて次の問題にいこう。

今度は絶対値の管理が複雑になるだけであり、臆することはない。丁寧に状況を整理して、正確に解いて貰いたい。

3-2. 次の関数のグラフ書きなさい。

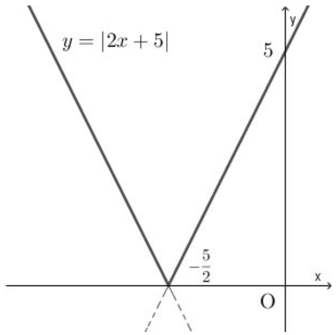
$$y = |x + 1| + |2x - 4|$$

今度は$y = |f(x)|$ではない為、絶対値カッコ内の数式の解で折り返し、の様に単純にはいかない。数直線なんかで書いてもらうと、とても分かりやすく理解出来るのではないか。

3 章解答

A-3-1.　絶対値カッコ内の数式を解き、絶対値記号を外してみよう

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$$



となる事が分かるだろうか。絶対値内が負になる時に

$-2x - 5$となるのである。

よってこの関数は右図の様になる。

A-3-2.　1 つ目と 2 つ目のカッコ内の数式をそれぞれ解くと

$x = -1,\quad x = 2$で正負が入れ替わっている。

これを$x < -1, -1 \leq x < 2,\ x > 2$と 3 つに場合分けする。

<u>$x < -1$の時</u>

どちらのカッコ内も中身は負になるので

$y = -(x + 1) - (2x - 4)$

$\quad = -3x + 3$

<u>$-1 \leq x < 2$の時</u>

1 つ目が正、2 つ目カッコ内は負となるので

$y = (x + 1) - (2x - 4)$

$\quad = -x + 5$

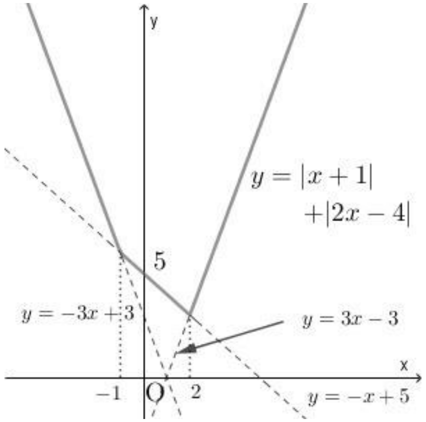
$\underline{x > 2}$の時

どちらのカッコ内も正になるので

$y = (x + 1) + (2x - 4)$

$\quad = 3x - 3$

よってグラフは右図の様になる。



という訳で、2 次関数の学習に入るまでの準備学習を終える。

最後の絶対値の問題は初見では中々解けないのではないだろうか。今回のプリントだと問題のすぐ下にヒントを載せすぎた為、素の力で解けなかったかもしれないので反省である(2 回目)。

ちなみに、現在 2-0 と試合内容でもマドリーが圧倒しているので満足感が凄いことになっている。

この調子で 2 次関数の学習も頑張ってほしいが、このプリントは次の単元以降は作らない可能性が非常に高いだろう(笑)。

数学演習(2 時間数②)　　　読了時間 40min

氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

前書き

さて、2 次関数①では 1 次関数をメインとして関数問題に対する基本事項を学んだ。前回、都築は疲労によって次回作は作らないと言ったのだが、小テスト作成とはいつもそうなるものだ。

という訳で、今回もまた頑張っていこう。

4 章　2 次関数のグラフ

前回までは 1 次関数を取り扱ってきたが、今回は漸く 2 次関数に入れそうだ。ここでは平方完成を含む、2 次関数の基本展開から説明していこうと思う。ある程度勉強している方は、次の章に入って貰っても構わない。打つの大変なので見てほしいが…

> xの 2 次式で表される関数をxの 2 次関数といい、一般的に次の式で表される。
>
> $$y = ax^2 + bx + c$$

所謂、放物線である。今までは直線(1 次関数)だったが、これからは曲線(2 次関数)を学習する。

2 次関数の形状を知るためにとても大事なのが、平方完成である。

まずは何も考えずにやり方を理解してもらいたい。

関数$y = 3x^2 - 12x + 6$を例に平方完成の手順を説明する。

> ① xを含む項だけ、x^2の係数で括る。
>
> ②xの係数を半分にして、２乗のカッコ内外計算をする。
>
> ③因数分解する。
>
> ④分配法則を使い、定数項を纏める。

①より、3 で括ってみる。

$= 3(x^2 - 4x) + 6$

②,③よりxの係数-4 を半分にし、２乗の形を作り、勝手に足した定数を引く。

$= 3\{(x-2)^2 - 4\} + 6$

④よりカッコ内にある-4 に大外の 3 を掛け算して外に出し、定数項に纏めたらお終いだ。

$= 3(x-2)^2 - 6$

で平方完成は完了だ。

この形は、原点を頂点とする$y = ax^2$をx軸,y軸方向、夫々に平行移動している事を示せていることが分かるだろうか。

x軸方向に$+2$、y軸方向に-6平行移動されている。

※$y + 6 = (x-2)^2$と見れば、上記の事は理解しやすい。何か理解しにくい点があれば都築まで。

よってこの 2 次関数の軸は$x = 2$となり、頂点座標は$(2, -6)$となる。

この様に平方完成してしまえば、2次関数に関する情報は殆ど分かってしまう。逆に言えば、平方完成でミスをしてしまうとそのあとの問題を全て落とすのと同義なので注意して貰いたい。

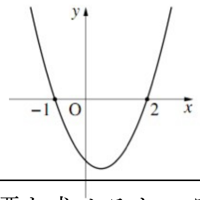
では実際に問題を解いていこうか！

4-1. 次の2次関数のグラフは、$y=-x^2$のグラフを夫々どの様に移動したものか答えよ。またその軸と頂点を求めよ。
(1)$y=-x^2+1$
(2)$y=-(x-4)^2+2$

まあ純粋に平方完成し、どの様な関数になるか見てあげればよいのではないだろうか。(2)はまず展開して、バラシてあげてから丁寧に平方完成しよう。

次の問題はある2次関数の形状が分かっているとき、そこから分かり得る情報を抜き出す問題だ。

4-2. 2次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフが右の図の様になる時、次の値の符号を求めよ。
(1)a
(2)b^2-4ac
(3)$a+b+c$



まずは$y=ax^2+bx+c$を平方完成し、必要な座標を求めるところから始めてほしい。そうしたら解けるはずだ。

次は2次関数のグラフの平行移動だ。平方完成し頂点座標がどの様に動いているか見れば、分かりやすいのではないだろうか。

4-3. 放物線$y=-2x^2+4x-4$をx軸方向に-3、y軸方向に1だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

xが$(x-(-3))$, yが$(y-(+1))$という塊に代わると考えたら、楽である。

ここで解説に入る前に一旦休憩！
この3問はどれ程解けただろうか。ヒントが多すぎて見難い箇所等があれば教えて貰いたい。今回からは完全に都築の趣味趣向でマドリーの選手紹介をしていきたいと思う。必読案件だ！

～break time～

Real Madrid 選手紹介 No.1
選手名:ルカ・モドリッチ(Luka Modrić)
背番号:10

スピードある司令塔。ラストパスの供給に加え、ドリブルの技術も高い天才肌の選手。ドリブル突破よりも状況を把握して出すラストパスが得意。1718シーズン、バロンドールを受賞した。

都築はモドリッチに惹かれて、マドリーを応援し始めました！

では、解答編といこうか。

4章解答

A-4-1.

$y=-x^2$を元として平行移動していることが分かる。前にも何度も言ったが、作り始めは深夜テンションである事と数式を打つのが非常に面倒であるので、節々を略解とさせて頂く。

(1) $y=-x^2$に＋1した形だ。

$y-1=-x^2$と書いたら分かりやすいだろうか。

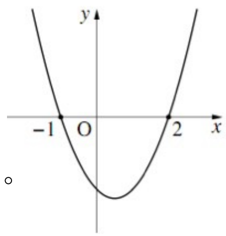
A. **y軸方向に1だけ平行移動したもの**
軸は$x=0$，頂点は点$(0,1)$

(2)同様に見てあげればよい。

$y-2=-(x-4)^2$と書く。

A. **x軸方向に4，y軸方向に2だけ平行移動したもの**
軸は$x=4$，頂点は点$(4,2)$

A-4-2.

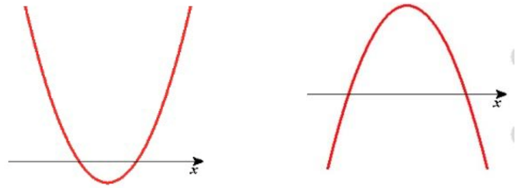


(1) aの符号は放物線が上に凸か、下に凸かを判別するだけのものである。

ここで凸を知らない人の為に、右に纏めておいた。

グラフは下に凸であるから、$\boldsymbol{a>0}$

凸の判別法



下に凸　上に凸

(2)次に関数$y=ax^2+bx+c$を平方完成してみよう。

$y=a(x+{}^{b}/_{2a})^2-{}^{(b^2+4c)}/_{4a}$

と平方完成出来た。(略解であることは突っ込まないでほしい)

よって、頂点は$(-{}^{b}/_{2a},-{}^{(b^2+4c)}/_{4a})$となる。

頂点のy座標はグラフを見ると負であるので

$-{}^{(b^2+4c)}/_{4a}<0$となり、$\boldsymbol{b^2-4ac<0}$となる。

(3) $a+b+c$は$x=1$をyに代入した値であることに気が付けただろうか。それに気づいてしまえば、即ち$x=1$の点でyの値が正か負かを求める簡単な問題になるのである。

$x=1$の時、グラフを見ると$\boldsymbol{y<0}$である。

A-4-3.　問題下でも述べたが、xが$(x-(-3))$，yが$(y-(+1))$という塊に代わると考える。

$y=-2x^2+4x-4 \quad\rightarrow\quad (y-1)=-2(x+3)^2+4(x+3)-4$となる。

～略解～

$\boldsymbol{y=-2x^2+8x-9}$となる。

ここで都築が疲れたので休憩。

～break time～

Real Madrid 選手紹介 No.2
選手名:トニ・クロース(Toni Kroos)
背番号:8
長短のパスを自由自在に操り、チームを思うままにコントロールする。そのパスは正確無比であり、パス成功率の高さがそれを裏付ける。パスミスをしない司令塔は、もはや無敵と言ってもいいかもしれない。

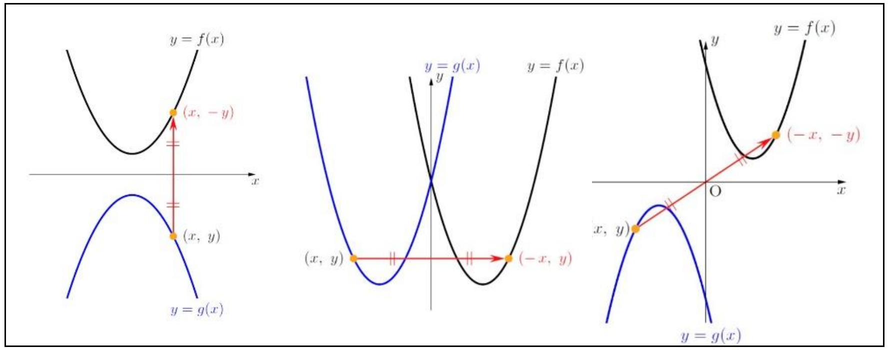
クロースの平均パス成功率が1試合で9割を下回っているのを見たことがありません！

5章　グラフの対象移動

さて、今回は平方完成、平行移動までを学んだうえで対象移動を学んで貰いたい。
x軸、y軸、原点に対して、座標上の点、グラフが対象に移動するとき、どの様な値、関数をとるのか。それを数式を使って明らかにし、問題を解きやすくするためのものだ。
では早速、右ページから要点を学んでいこう。

①点(a,b)の対象移動
　x軸対象:点$(a,-b)$に移る。
　y軸対象:点$(-a,b)$に移る。
　原点対象:点$(-a,-b)$に移る。

②関数$y=f(x)$の対象移動
　x軸対象: $y=-f(x)$
　y軸対象: $y=f(-x)$
　原点対象: $y=-f(-x)$



折り紙の様に折りたたんで、一致する点、関数をイメージして欲しい。原点対象は原点を中心に180度回転することを想像してもらえれば分かりやすいと思う。
ここで学ぶ事はこれだけなので、兎に角暗記するのではなく、なぜ上記の様になるのか考えながら勉強して貰いたい。

では、実際に解いていこうか。

5-1.　2 次関数$y = 2x^2 - 5x + 4$のグラフを原点に関して、対象移動した曲線をグラフに持つ 2 次関数を求めよ。

p.4 の表を理解していれば代入するだけの簡単な問題だ。

少し応用問題に入って締めようか。

5-2.　放物線$y = x^2 + ax + b$を原点に関して対象移動し、更にx軸方向に-1，y軸方向に 8 だけ平行移動すると、放物線$y = -x^2 - 5x + 11$が得られるという。定数a, bを求めよ。

問題文の通りに、指示通りに、只管に解いてほしい。定数a, bを用いて表すことの出来た関数と$y = -x^2 - 5x + 11$の係数合わせをして、答えを出そう。この解法は数ⅡB の序盤の恒等式という分野で扱うものである。難しいことは何らないので、ガンガン解いていこう。

5 章解答

A-5-1.　xを$-x$、yを$-y$と置き換える。

〜略解〜

$\therefore \boldsymbol{y = -2x^2 - 5x - 4}$

もう眠たくなってきた。質問なら授業でいくらでも受けるので、解説が若干相当少なくなっていくと思う(笑)。

A-5-2.　$y = x^2 + ax + b$のxを$-x$、yを$-y$と置き換える。

x軸方向に-1，y軸方向に 8 だけ平行移動するので、xを$(x+1)$、yを$(y-8)$と置き換える.

そして、出来上がった関数と$y = -x^2 - 5x + 11$を見比べて、係数を比較しよう。

〜略解〜

$\therefore \boldsymbol{a = 7, b = 3}$

後書き

まず此処までお読み頂きありがとうございます。2 次関数の移動系統の問題はどうだったでしょうか。最後の方はかなり雑だったので、質問が出てしまうかもしれません。それについては、授業に必ず持ってきてください。楽しみにしています。2 回目ですが、もうこのプリントは作らないと思います。何故ならしんどいからです笑。

もう朝 6 時なので寝ますね。

数学演習(2 時間数③)　　　読了時間 40min

氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

前書き

何故またこのプリントを作成してるのだろうか。今回は 2 次関数の最終章に当たる最大･最小の単元を扱う。今までより長編になる事が予想される為､都築も今度ばかりは2日かけて作成しようと思う｡といっても、作成開始時間が朝 4 時なので寝不足は確定なのだが…。まあ、頑張っていこうか。

(追記)

一度手をつけてから 1 か月経過してしまった。大学の試験も終わり、都築にも時間に余裕が出来たので作成していこうと思う。マドリーは格下の相手に大敗したばかりなので散々だ。

6 章　2 次関数の最大･最小

いきなりではあるが、最初から今回の単元のメインテーマである最大･最小問題を扱う。パターンも多く、理解しにくい部分もあるかもしれないが、頑張ってほしい。

まず、4 章解答の方に載せてあるのだが、2 次関数の下に凸、上に凸の判別方法を思い出してほしい。そこでは、$y = ax^2 + bx + c$のaのが正か負かで形状が変わると説明した。覚えていなかったら、前のプリントに戻って復習しよう。　･･･①

また、もう 1 つ復習として、2 章で学んだ 1 次関数の最大最小を覚えているだろうか。そこでは$y = ax + b$のaの値の正負と定義域によって、最小値、最大値を取らない可能性が有る事をお話ししたと思う。関数が∞に飛んでしまうときには、定義域によって区間が定まっていない場合、値を取ることが出来ない。不適になるわけである。　･･･②

これらを踏まえたうえで､1 度簡易的な問題に取り組んでみよう。

6-1. 次の 2 次関数、$y = 3x^2 + 4x - 1$に最大値、最小値があればそれを求めよ。

①より$a = 3 > 0$から、下に凸であることが分かる。よって、最小値は頂点座標のy座標である。

2 よりこの 2 次関数が下に凸である事から、最大値は∞まで飛んでしまうので取らないことが分かる。よって最大値はない。 此処まで分かってしまえば、かなりスムーズに解けるのではないか。

何だか初っ端から、とても暇なプリントになっている気がする。基礎を 固めている最中だから、仕方がないのかもしれない。

というわけで休憩だ

というわけで今回紹介するのはマルセロ！

レアルマドリー3 連覇黄金期の立役者であり、超攻撃的サイドバック。

マドリディスタであるならば必読だ！

～break time～

Real Madrid 選手紹介 No.3

選手名:マルセロ（Marcelo）

背番号:12

レアルマドリード特有となりつつある超攻撃型サイドバックである。攻撃参加は毎回行い、シュートも自分から打ちに行く。マルセロが上がった際の左 SB の穴を相手は狙いにいくため、CB との連携が必須である。

次の問題に移る。次は 2 次関数に定義域が設定されているケースである。②で話したが、一見∞に飛んでしまいそうな関数でも、定義域によって縛られてしまえば、最大 or 最小を取ることが出来るのだ。実際に解いてみよう。

6-2. 次の 2 次関数、$y = x^2 + 8x + 5\ (-6 < x \leq -1)$に最大値、最小値があればそれを求めよ。

また例の様に①②より解を絞ってみよう。

①より、$a = 1 > 0$から、下に凸である事が分かる。よって、最小値は頂点座標のy座標である。

②より、の 2 次関数が下に凸である事から、最大値は∞まで飛んでないことが分かる。しかし、定義域$-6 < x \leq -1$が存在するため、軸から対象にどちらかで最大値をとることになる。自分でグラフを作図して考えてみてほしい。

6-3. $0 < a < 3$とする。関数$y = x^2 - 2x + 3(0 \leq x \leq a)$について、次の問いに答えなさい。

(1)この関数の最小値を求めなさい。

(2)この関数の最大値を求めなさい。

これはaの取る値によって最大･最小値が変わってしまう問題である。aがどの値を取る時に最大･最小値が変化するのか、ノートに実際にグラフを書いてみて判断してほしい。勿論、平方完成をすることは必須だ。

6-4. $1 \leq a \leq 5$とする。関数$y = -x^2 + 8x - 6 (a \leq x \leq a + 2)$について、次の問いに答えなさい。

(1)この関数の最大値を求めなさい。

(2)この関数の最小値を求めなさい。

次の問題は区間が左右に動く問題である。aの取る値いよって、$a \leq x \leq a + 2$の条件のもと、同じ間隔をとりながら区間が動くのである。

また場合分けが必要になる事が想像出来てしまい、ため息をつく気持ちも分かるが、先のことが予測出来るようになったと喜んで欲しい。

～break time～

Real Madrid 選手紹介 No.4

選手名:マルティン・ウーデゴーア

(Martin Ødegaard)

背番号:23

2015 年 1 月 22 日に 6 年契約でスペインのレアルマドリードに移籍した。当時史上最年少となる 16 歳での移籍であり、神童と称されている。プレースタイルは 8 番のパサーというよりも、10 番タイプ。トップ下などのポジションを好み、守備には難を抱えている。

6 章解答

少し長かったかもしれないが、2 次関数の最大最小問題は如何だっただろうか。少し難しく、問題と向き合うのが大変だったかもしれない。しかし、この単元こそが 2 次関数の山場であり、メインテーマなので確実に理解して進もう。

これからはパターン別にして、最大最小問題を紐解いていく。

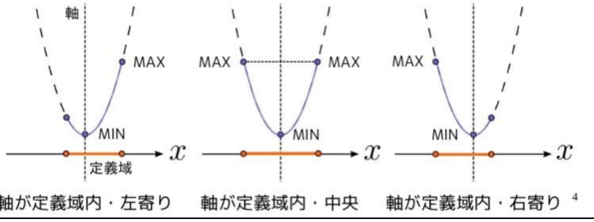
定義域に制限がある時の最大・最小

・軸の位置と定義域によって最大最小値を判断することが可能。

ここからは$a > 0$の 2 次関数を例にする。

軸が**定義域内**に存在するとき

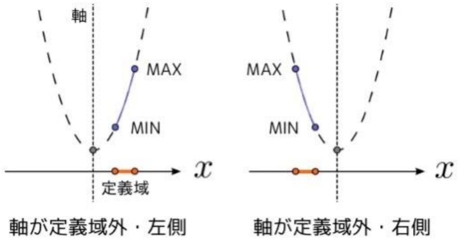
頂点で最小値を取り、定義域端点の内**軸から遠い方で最大値**を取る。



[4]

軸が**定義域外**に存在するとき

定義域端点の内、**軸から遠い方で最小値**を取り、**軸から近い方で最大値**を取る。



さてこれらを踏まえて、解説していこうと思う。

A-6-1.

問題の下に解答に近しいものをたくさん載せてある。前回までの復習としての①②を用いて、最大値最小値の区分けをしよう。

$y = 3x^2 + 4x - 1$を平方完成すると、$y = 3(x + {}^{2}/_{3})^2 - {}^{7}/_{3}$となる。

最大値は問題下部にも説明してあるが、下に凸である為値を取らない。

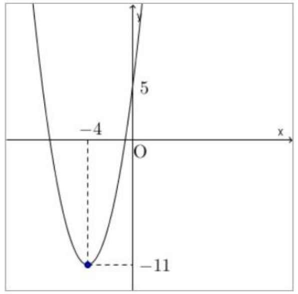
また、下に凸である為、頂点座標が最小値をとる。

平方完成から頂点座標は$(-{}^{2}/_{3}, -{}^{7}/_{3})$となるので、最小値は$-{}^{7}/_{3}$である。

最大値は取らない

最小値は$x = -{}^{2}/_{3}$のとき、$y = -{}^{7}/_{3}$となる。

A-6-2.



まず平方完成しよう。これが基本だ。

$y = x^2 + 8x + 5 = (x + 4)^2 - 11$

これで右図の様にグラフを書いてみよう。

次に定義域端点を調べる。

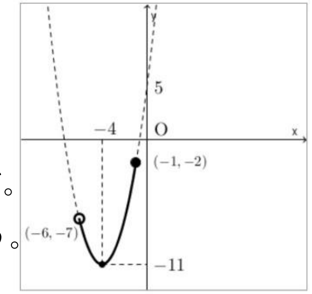
$x = -6$ のとき、$y = -7$

$x = -1$ のとき、$y = -2$となるので

右図の様に、範囲が決まる事になる

定義域$-6 < x \leq -1$の等号にも注意が必要だ。

よってこのグラフみて最大最小値を答えよう。



最大値は$x = -1$のとき、$y = -2$

最小値は$x = -4$のとき、$y = -11$となる。

〜break time〜

Real Madrid 選手紹介 No.5

選手名:セルヒオ･ラモス(Sergio Ramos)

背番号:4

スピード･対人の強さ･予測･ビルドアップ･得点力、どれをとっても世界最高峰の DF 。

熱が入りすぎて退場になりやすいのが唯一の欠点だが、今のレアルマドリーに欠かせないカピタンだ。

A-6-3.

まずどうにもこうにも、グラフを書かないことには何もできない。実際に平方完成してみよう。

$$y = x^2 - 2x + 3$$
$$= (x-1)^2 + 2 \quad \cdots ①$$

よって頂点座標は$(1, 2)$となる。

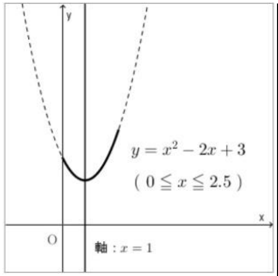


図 1

今回の 2 次関数は

$(0 \leq x \leq a)$という範囲なので、

実際にどのような範囲をとるのか

具体的な数値を代入して調べてみよう。

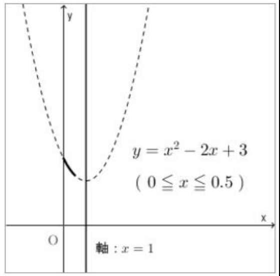


図 2

図 1，図 2 は実際に数値を入れてみた結果である

$a = 2.5$と$a = 0.5$を代入すると右図の様になる。

ご覧の様に区間の右端が動くことにより最小値が定まらない。

よって場合分けをしなければならず、最小値から考えていこう

・区間の右端が頂点座標に到達しない場合$(0 < a < 1)$

この場合関数の右端で最小値をとる。図 2 を参考にされたい。

右端のx座標はaなので

y座標は$y = x^2 - 2x + 3$のxにaを代入すれば良い。

$\therefore y = a^2 - 2a + 3$

次に区間の右端が頂点座標を通過しているときを考える。

・区間の右端が頂点座標を通過する場合$(1 \leq a < 3)$

頂点座標を通過する場合、最小値は右端ではなく関数全体の最小値である頂点座標をとる。図 1 を参考にされたい。

グラフはaによって形状が左右されない為、頂点座標aによらず不変である。

よって頂点座標のy座標を求めればよいので、①より

$\therefore y = 2$

となる。

最小値の場合分けは以上の 2 つである。

$(0 < a < 1)$のとき、最小値は$y = a^2 - 2a + 3$

$(1 \leq a < 3)$のとき、最小値は$y = 2$

次に最大値について考えてみよう。

最大値もaについて場合分けする。

図 1，図 2 の様に右端、左端が最大になる時に加え、図 3 の様に$x = 0, 2$で同時に最大値を取る場合も考慮しなくてはならない。

図 1, 2, 3 の 3 通りを考えて場合分けする。

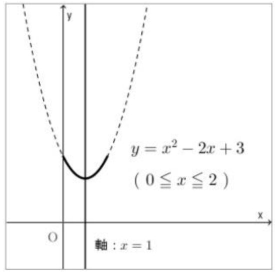


図 3

・区間の右端が頂点座標に到達しない場合$(0 < a < 2)$

この場合関数の左端で最大値を取る。図 2 を参考にされたい。

$x = 0$の時に最大値を取るので代入して

$f(0) = x^2 - 2x + 3$

$\quad = 3$

・区間の右端が頂点座標を通過する場合$(2 < a < 3)$

この場合関数の右端で最大値を取る。図 1 を参考にされたい。

$x = a$の時に最大値を取るので代入して

$f(a) = a^2 - 2a + 3$

・区間の右端と左端が同じ高さの場合$(a = 2)$

この場合関数の右端と左端で最大値を取る。図 3 を参考にされたい。

$x = 0, 2$の時に最大値を取るので代入して

$f(0, 2) = 3$

よって、

$(0 < a < 2)$のとき、最大値は$y = 3$

$(2 < a < 3)$のとき、最大値は$y = a^2 - 2a + 3$

$(a = 2)$のとき、最大値は$y = 3$

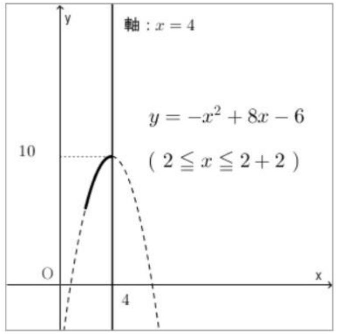
解説が例になく長くなっており、恐ろしいほど時間がかかっている。

まだまだ解説する問題が残っているので長編になりそうだ。

これ時給つけれたら全部で 2 万ぐらいいくんだろうな…

A-6-4.

またいつもの様にグラフの外形を書こう。平方完成だ。



$y = -x^2 + 8x - 6$

$\quad = -(x - 4)^2 + 10$

よって$(4, 10)$が頂点座標だと分かった。

(1)

aの範囲は$1 \leq a \leq 5$なので、aが小さいうちは

区間右端が最大になる事がわかる。$a = 2$を試しに

代入してみたものを右に載せる。

途中からは頂点が最大値をとり、頂点を左端が通り過ぎてからは左端が最大値を取る。

これらを 6-3 の様に場合分けし、纏めると

～(略解)～

$(1 \leq a < 2)$のとき、最大値は$y = -a^2 + 4a + 6$

$(2 \leq a \leq 4)$のとき、最大値は$y = 10$

$(4 < a \leq 5)$のとき、最大値は$y = -a^2 + 8a + 6$

(2)

aの区間で最小値も同様に考える。最大値の問題と同じように考えていいのだが､区間の左端，右端が同じ高さになるときのみ考慮しなければいけない。

最大値のように場合分けすると

～(略解)～

$(\mathbf{1 \le a < 3})$**のとき、最小値は**$\boldsymbol{y = -a^2 + 8a - 6}$

$(\boldsymbol{a = 3})$**のとき、最小値は**$\boldsymbol{y = 9}$

$(\mathbf{3 < a \le 5})$**のとき、最小値は**$\boldsymbol{y = -a^2 + 4a + 6}$

問題が終わりに近づいてくると雑になるのはいつもの事である。

6-3 に比べると解説の量が$1/_4$ぐらいなのだが、気力が持ちそうにない。

解説の少なさに自分で笑っているのだが、いつもと同じ様に分からない点があれば都築まで聞きに来てほしい。

もしいなければ、他の先生でも全然対応可能な問題だと思うので、是非どんどん質問して欲しい。

～break time～

Real Madrid 選手紹介 No.6

選手名:カリム・ベンゼマ(Karim Benzema)

背番号:9

この選手はポジションベンゼマを生み出した選手として紹介したい。圧倒的ボールのキープ力･両足の精度の高さ等から彼特有の攻撃を織りなす。プレースタイルは 9.5 番であり、前線への長いフィードパスも簡単に裁くことが出来る。今のマドリーは彼なしでは攻撃が単調になるだろう。

7 章　2 次関数の最大最小と文章題

今まで長々と 2 次関数の最大最小問題を扱ってきた。

沢山の演習量に若干しんどさも感じたかもしれない。筆者もその 1 人だ…

しかし、挙げることの出来た問題は都築が想定している量の半分程度しかなく、まだまだ勉強を続けてほしいと思っている。問題はここからだ。

6 章で扱った基本的な無機質な問題から実用的な問題に移行していこうと思う。この先はゴールが見えているのでこのまま頑張っていこう。

7-1. 長さ$6m$の金網を直角に折り曲げて、直角な壁の隅に長方形の囲いを作ることにした。囲いの面積を最大にするには、金網をどのように折り曲げればよいか。

さて文章題に突入だ。日本語を数式に変換する作業は、数学が初めて日常生活に関与してきていると感じる場面なのではないだろうか。

どの様に立式できるか試行錯誤して欲しい。

7-2. 直角を挟む 2 辺の長さの和が 20 である直角三角形において、斜辺の長さが最小の直角三角形を求め、その斜辺の長さを求めよ。

この問題も 7-1 が三角形になっただけのような問題である。このままの勢いで解いてしまおう！

A-7-1.

長方形の縦･横の長さの合計が$6m$なので、一辺をxmとすると、もう一辺は$(6-x)m$となる。辺の長さは 0 よりも大きいので、

$x>0,(6-x)>0$　･･･①

となる。①よりxの範囲を不等号で表すと、

$0<x<6$　･･･②

よって、面積が最大値をとる際の辺の長さを知りたいので、面積Sを辺の長さxで表し、その関数の最大値を②の条件のもと見つければ良い訳である。

では早速、解いていこう。

$S=x(6-x)$

　$=-(x-3)^2+9$

と平方完成すると、上に凸の 2 次関数だという事が分かる。

②の条件下、最大値を考える。

この 2 次関数は定義域がなければ、頂点座標が最大値をとる。

$x=3$は②の定義域を満たしているので、頂点が最大値を取る。

$\therefore f(3)=9$

よって$x=3$の時、最大値 9 をとる。

∴端から$\boldsymbol{3m}$のところ、即ち金網を丁度半分に折り曲げればよい。

（追記）

2021/2/10 22 節 vsGetafe において、2p で紹介していた Marcelo が久々のスタメンに入った。ここ 2 シーズンぐらいはパフォーマンスの低調ぶりが取り沙汰れていることが多く、放出候補の代表格であったのだが、この試合では Zidane 監督の初の試みである 3 バックを取り入れたことにより息を吹き返した。Marcelo 自身アシストも記録し、この先のマドリーが楽しみなる一戦であったので興奮が抑えられない。

A-7-2.

この問題も 7-1 と同じように一辺をxと置き、文字で表してみよう。長さの和が 20 であるので片方の一辺をxとすると、

もう片方は$20-x$と表すことが出来る。

斜辺の長さをlとおき、三平方の定理より立式すると

$l^2=x^2+(20-x)^2$

　$=2(x-10)^2+200$　･･･①

と平方完成できる。またxの範囲は辺の長さが 0 以上な事から

$x>0,20-x>0$　となり、この 2 つの不等式より$0<x<20$と分かる。この不等式と①よりこの関数の最小値は頂点座標である 200 である。l^2の最小値が 200 なのでlの最小値は$\sqrt{200}=10\sqrt{2}$となる。

∴辺の長さは共に 10 で斜辺の長さが$\boldsymbol{10\sqrt{2}}$の直角三角形

高 1 数学　　前期
数学演習 H1　　2 次関数
編者　　　都築　岳
発行者　　都築出版
2021 年 2 月 10 日　　初版第 1 刷発行

著者紹介

都築　岳

(つづき　がく)

ここまで読んでくださった皆さん
こんばんは。いつも眠そうにしていて、
朝方までサッカーの試合をみている
都築です。たった先ほど 2021 年の抱負
を “朝起きること”に決めました。
そんな事を言いながらもう既に夜中の 3 時
なんですけどね笑
2 月中には年賀状出さないとな…。

ISBN978-4-949999-12-0

C3000 ¥400E

定価：本体 400 円＋税

※本冊子は値段をつけて
おりますが非売品になります。

9784949999120

1923000004009

都築出版